

**∞ Baccalauréat mathématiques élémentaires ∞**  
**Centres étrangers juin 1963<sup>1</sup>**

**EXERCICE 1**

Déterminer les fonctions  $y$  de la variable  $x$ , une fois dérivables, qui vérifient l'équation

$$y' + 2y = 0,$$

$y'$  désignant la fonction dérivée de la fonction  $y$ .

**EXERCICE 2**

Le plan de la figure est rapporté à un repère orthonormé,  $x'Ox$ ,  $y'Oy$ ; l'unité de longueur est le centimètre. Soit  $\mathcal{I}$  l'inversion de pôle  $O$  et de puissance 9.

1. L'énoncé notera (P) tout cercle qui coupe  $x'Ox$  en deux points,  $M$  et  $M'$ , qui soient inverses dans  $\mathcal{I}$ .

Montrer que tout cercle  $(\Gamma)$  est orthogonal à un cercle fixe,  $(O)$ .

Un point quelconque du plan est-il le centre d'un cercle  $(\Gamma)$ ? Discuter.

Un cercle étant représenté par son équation,

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + p = 0,$$

quelles conditions doivent vérifier les coefficients pour qu'il soit un cercle  $(\Gamma)$ ?

On appelle  $\mathcal{S}$  l'ensemble des cercles  $(\Gamma)$ ; la suite du problème a pour objet l'étude de certains ensembles de  $\mathcal{S}$ .

2. Soit  $(\Gamma_1)$  de centre  $\gamma_1$  tout cercle  $(\Gamma)$  dont le centre appartient à une droite fixe,  $(D_1)$  non perpendiculaire à  $x'Ox$ .

Montrer que le cercle  $(\Gamma_1)$  appartient à un faisceau linéaire  $\mathcal{F}$ , de cercles.

Discuter la nature du faisceau  $\mathcal{F}$  suivant la position de la droite  $(D_1)$  par rapport au cercle  $(O)$ . Déterminer les points limites, ou les points de base, du faisceau  $\mathcal{F}$ .

Inversement, tout cercle du faisceau  $\mathcal{F}$  est-il un cercle  $(\Gamma_1)$ ? En déduire l'ensemble des points  $\gamma_1$ .

3. Soit  $(\Gamma_2)$ , de centre  $\gamma_2$  tout cercle  $(\Gamma)$  tangent à une droite fixe,  $(D_2)$ , d'équation  $y = 1$ . Montrer, à l'aide de l'inversion  $\mathcal{I}$ , que le cercle  $(\Gamma_2)$  est aussi tangent à un cercle fixe,  $(C_2)$ , dont on précisera le centre et le rayon.

Un cercle étant représenté par l'équation (1), écrire un système de conditions liant  $\alpha, \beta, p$  pour qu'il soit un cercle  $(\Gamma_2)$ . En déduire l'ensemble des points  $\gamma_2$ .

4. Soit  $(\Gamma_3)$ , de centre  $\gamma_3$ , tout cercle  $(\Gamma)$  tangent à un cercle fixe  $(C_3)$ , de rayon 1, dont le centre a pour coordonnées  $(0 ; +2)$ .

Montrer, à l'aide de l'inversion  $\mathcal{I}$ , que le cercle  $(\Gamma_3)$  est aussi tangent à un cercle fixe,  $(C'_3)$ , dont on précisera le centre et le rayon.

---

1. Athènes, Espagne, Israël, Istanbul, Liban, Maroc, Portugal, République d'Afrique Centrale, Rome, Syrie, Tunisie

Un cercle étant représenté par l'équation (1), écrire un système de conditions liant  $\alpha, \beta, p$  pour qu'il soit un cercle ( $\Gamma_3$ ).

En déduire l'ensemble des points  $\gamma_3$ . On pourra faire une translation du repère, portant l'origine au point de coordonnées (0 ; +4).

**N. B.** - Après la question 1, les questions 2, 3, 4 peuvent être traitées dans un ordre arbitraire. Les figures seront faites avec soin ; l'unité de longueur est imposée : le centimètre.