Baccalauréat épreuve de spécialité (terminale)

Corrigé du sujet du jour 1

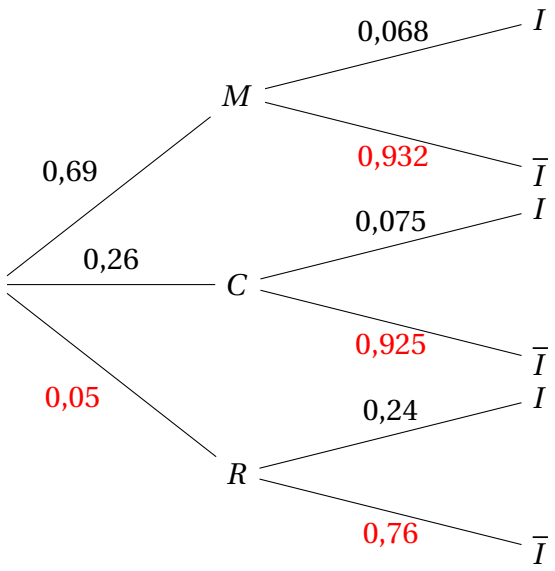
Voie générale – Amérique du Sud – 12 novembre 2026

A. P. M. E. P.

Exercice 1 (5 points)

Partie A

1. L'arbre pondéré modélisant la situation de l'énoncé est le suivant :



Les probabilités en noir sont données dans l'énoncé, celles en rouge sont calculées par complémentarité.

2. Calculons la probabilité que le patient soit atteint d'une infection. Les évènements M, C et R formant une partition, la formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(I) &= P(M \cap I) + P(C \cap I) + P(R \cap I) \\ &= P(M) \times P_M(I) + P(C) \times P_C(I) + P(R) \times P_R(I) \\ &= 0{,}69 \times 0{,}068 + 0{,}26 \times 0{,}075 + 0{,}05 \times 0{,}24 \\ &= 0{,}078\,42 \end{aligned}$$

3. Il s'agit de calculer $P_{\overline{I}}(R)$:

$$P_{\overline{I}}(R) = \frac{P(R \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P_R(\overline{I})P(R)}{1 - P(I)} = \frac{0{,}76 \times 0{,}05}{1 - 0{,}078\,42} \approx 0{,}041 \quad \text{arrondi au millième}$$

Partie B

1. La variable X_n dénombre les succès d'une expérience à deux issues, succès (de probabilité p) et échec, répétée n fois. L'échantillon étant supposé être assimilé à un tirage sans remise, on peut donc conclure que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres $p = 0{,}078$ et n.

2. a. Calculons p_n, probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au moins un patient atteint de l'infection :

$$p_n = P(X_n \geqslant 1) = 1 - P(X_n < 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - p^0(1-p)^n = 1 - (1-p)^n = 1 - 0{,}922^n.$$

b. Il s'agit de déterminer le plus petit entier n à partir duquel $p_n \geqslant 0{,}99$:

$$p_n \geqslant 0{,}99 \iff 1 - 0{,}922^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}922^n \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}922)} \approx 56{,}7.$$

À partir d'un échantillon de 57 patients, la probabilité qu'il y ait au moins un malade infecté est supérieure à 0,99.

3. a. Calculons l'espérance de la variable R_n :

$$E(R_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times np = p.$$

En effet, X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p, donc d'espérance np.

b. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$ s'écrit :

$$\text{Pour tout } \delta > 0, \text{ on a : } P(|X - E(X)|) \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

c. Si on admet que $V(R_n) = \dfrac{0{,}071\,916}{n}$, l'inégalité précédente devient dans le cas d'un écart $\delta = 0{,}1$:

$$P(|R_n - E(R_n)| \geqslant 0{,}1) = P(|R_n - 0{,}078|) \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{V(R_n)}{0{,}1^2} = \frac{0{,}071\,916}{0{,}01n} = \frac{7{,}1916}{n} \leqslant \frac{7{,}2}{n}.$$

d. Si on observe 20 % de patients infectés dans un échantillon de 500 patients hospitalisés, l'inégalité dans cette cette situation devient :

$$P(|R_{500} - 0{,}078)| \geqslant 0{,}122) \leqslant \frac{V(R_{500})}{0{,}122^2} = \frac{0{,}071\,916}{0{,}122^2 \times 500} \approx 0{,}0097.$$

La probabilité d'observer un écart aussi grand que 0,122 est inférieure à 0,01, ce qui nous permet de dire qu'il s'agit d'une situation exceptionnelle.

.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$:

$$\overrightarrow{\text{AB}} : \begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-(-2) \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{AC}} : \begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-(-2) \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On a alors : $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 3 \times 3 - 3 \times 3 = 0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux et donc que le triangle ABC est rectangle A.

2. On considère le plan P d'équation cartésienne $x+y+z-3=0$. Les coordonnées du point A vérifient cette équation cartésienne, en effet : $x_{\text{A}} + y_{\text{A}} + z_{\text{A}} - 3 = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$, le point A est donc un point du plan P.

3. On note P' le plan orthogonal à (AC) passant par A. Un vecteur normal à P' est $\overrightarrow{\text{AC}}$ qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Une équation cartésienne du plan P' est donc de la forme $3x - 3z + \delta = 0$.

Le point A est dans P', ses coordonnées vérifient son équation cartésienne :
$\text{A} \in P' \iff 3x_{\text{A}} - 3z_{\text{A}} + \delta = 0 \iff 9 - 6 + \delta = 0 \iff \delta = -3$.

Une équation de P' est alors $3x - 3z - 3 = 0$, ou bien, plus simplement $x - z - 1 = 0$.

4. Soit Δ la droite d'intersection des plans P et P'.
Remarque : d'après leurs équations cartésiennes, ils ne sont pas confondus, ni parallèles car leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires. Les deux plans sont bien sécants selon une droite.
La droite Δ est définie par le système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 1 \\ z + 1 + y + z - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 1 \\ y = -2z + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Partie B

1. On considère le point D de coordonnées $(0\ ;\ 4\ ;\ -1)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AD}}$ sont alors $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$. D'où : $\overrightarrow{\text{AD}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = (-3) \times 3 + 6 \times 3 - 3 \times 3 = 0$;
de même :
$\overrightarrow{\text{AD}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = (-3) \times 3 + 6 \times 0 - 3 \times (-3) = 0$.

La droite (AD) est donc orthogonale aux droites (AB) et (AC) sécantes en A, elle est donc orthogonale au plan (ABC).

2. Calculons le volume $\mathcal{V}$ de la pyramide ABCD.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}(\text{ABC}) \times \text{AD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \text{AB} \times \text{AC} \times \text{AD}.$$

Le triangle ABC est en effet rectangle en A, son aire est donc égale à $\frac{1}{2} \times \text{AB} \times \text{AC}$.
Soit

$$\mathcal{V} = \frac{\text{AB} \times \text{AC} \times \text{AD}}{6}.$$

D'après les composantes des trois vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ calculées précédemment, on obtient :

$\text{AB} = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$;

$\text{AC} = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;

$\text{AD} = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Finalement, en unité de volume :

$$\mathcal{V} = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{6} = 27$$

3. Calculons de deux façons différentes le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{\text{DB}} : \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{DC}} : \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

- à l'aide des coordonnées : $\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DC}} = 6 \times 6 + (-3) \times (-6) = 54$.
- à l'aide de la formule du cosinus : $\overrightarrow{\text{DB}} \cdot \overrightarrow{\text{DC}} = \text{DB} \times \text{DC} \times \cos(\widehat{\text{BDC}})$

On en déduit alors :
$\cos(\widehat{\text{BDC}}) = \dfrac{54}{\text{DB} \times \text{DC}} = \dfrac{54}{\sqrt{6^2+(-3)^2+6^2} \times \sqrt{6^2+(-6)^2}} = \dfrac{54}{\sqrt{81} \times \sqrt{72}} = \dfrac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
et on a bien :

$$\cos(\widehat{\text{BDC}}) = \frac{\pi}{4}.$$

4. Calculons l'aire du triangle DBC en unité d'aire :

$$\mathcal{A}(\text{DBC}) = \frac{1}{2} \times \text{DB} \times \text{DC} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27$$

5. Le volume du tétraèdre ABCD peut également être calculé de la façon suivante :

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}(\text{DBC}) \times \text{d(A,(BCD))}$, où d(A,(BCD)) désigne la distance du point A au plan (BCD).
On en déduit :

$$\text{d(A,(BCD))} = \frac{3\mathcal{V}}{\mathcal{A}(\text{DBC})} = \frac{3 \times 27}{27} = 3$$

Exercice 3 (4 points)

1. Sur l'intervalle $[-2\,;0]$, f' est décroissante, la fonction f est donc concave sur cet intervalle.
Réponse 1. c

2. Le nombre d'équipes est égal au nombre de parties à 10 éléments pris dans un ensemble de cardinal 20, c'est-à-dire $\binom{20}{10}$.
Réponse 2. a

3. Le test d'arrêt de la ligne 4 est « while u < 100 ».
Réponse 3. c

4. On peut éliminer les réponses **a.** et **b.** pour lesquelles on n'a pas $f(1) = 0$.
Si $f(x) = -\dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{3(1-x)} + \dfrac{3}{2}$, on a $f'(x) = -\dfrac{3}{2}(-3)\,\mathrm{e}^{3(1-x)} = \dfrac{9}{2}\,\mathrm{e}^{3(1-x)}$, et $f(0) = 1$.
$f'(x) + 3f(x) = \dfrac{9}{2}\,\mathrm{e}^{3(1-x)} - 3 \times \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{3(1-x)} + 3 \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$.
Réponse 4. d

Exercice 4 (6 points)

Partie A : étude de fonction

1. Pour tout $x > 0$, $f(x) = x(2 - \ln(x)) = 2x - x\ln(x)$.

- Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \ln(x) = -\infty$, par produit on aura $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2 - \ln(x) + x \times \dfrac{-1}{x} = 1 - \ln(x)$.

3. Le sens de variation de la fonction f est alors donné par le signe de l'expression $1 - \ln(x)$ qui est strictement positive sur $]0\,;\mathrm{e}\,[$, strictement négative sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$ et nulle en e. La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\mathrm{e}\,[$ et strictement décroissante sur $]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$. On peut résumer par un tableau de variation :

x	0		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ 0	↗	$f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$	↘	$-\infty$

4. $f(\mathrm{e}^2) = \mathrm{e}^2(2 - \ln(\mathrm{e}^2)) = \mathrm{e}^2(2-2) = 0$. Comme f est strictement décroissante sur $[\,\mathrm{e}^2\,;+\infty[$ (car $\mathrm{e}^2 > \mathrm{e}$) et nulle en e^2, on déduit que $f(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[\,\mathrm{e}^2\,;+\infty[$.

5. a. $f(\mathrm{e}^3) = \mathrm{e}^3(2-3) = -\mathrm{e}^3 < -1$. La fonction continue f est strictement décroissante sur l'intervalle $[\,\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3]$, sa restriction sur cet intervalle est alors bijective sur l'intervalle $[-\mathrm{e}^3;0]$ qui contient -1. Il existe donc bien un unique réel $\alpha \in [\,\mathrm{e}^2\,;\mathrm{e}^3]$ tel que $f(\alpha) = -1$.

b. À l'aide d'une calculatrice, on obtient l'encadrement au dixième de α :

$$8{,}3 < \alpha < 8{,}4$$

c. $f(\alpha) = -1 \iff \alpha(2-\ln(\alpha)) = -1 \iff 2-\ln(\alpha) = -\dfrac{1}{\alpha} \iff \ln(\alpha) = 2+\dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : étude d'une suite

1. Montrons par récurrence sur n que pour tout entier n : $0{,}1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$.

- **condition initiale** : $u_0 = 0{,}1 \in [0{,}1\,;\,\mathrm{e}]$;
- **hérédité** : si pour un certain entier n, on a $u_n \in [0{,}1\,;\,\mathrm{e}]$, alors :
  Comme f est croissante sur $[0{,}1\,;\,\mathrm{e}]$, $f([0{,}1\,;\,\mathrm{e}]) = [f(0{,}1)\,;f(\mathrm{e})] = [f(0{,}1)\,;\,\mathrm{e}]$.
  De plus $f(0{,}1) = 0{,}1 \times (2-\ln(0{,}1)) \approx 0{,}43$, ce qui établit que $u_{n+1} \in [0{,}1\,;\,\mathrm{e}]$.
  L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est aussi au rang $n+1$
  D'après le principe de récurrence, on a donc montré que pour tout entier n : $0{,}1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$.

2. On admet que la suite (u_n) est croissante. D'après le théorème de convergence dominée ((u_n) est majorée par e), on peut en déduire que la suite (u_n) converge vers un réel L, avec $L \leqslant \mathrm{e}$.

3. On sait aussi que cette limite L est solution de l'équation $f(x) = x$, on en déduit la valeur de L :

$$f(L) = L \iff L = L(2-\ln(L)) \iff 2-\ln(L) = 1 \iff \ln(L) = 1 \iff L = \mathrm{e}$$

La simplification par L dans la 2e étape est légitime puisque $L \in [0{,}1\,;\,\mathrm{e}]$ est non nul

Partie C : calcul d'aire

1. Calculons $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} x\ln x\,\mathrm{d}x$. Effectuons une intégration par parties en posant :

$$u'(x) = x \quad v(x) = \ln x$$
$$u(x) = \frac{x^2}{2} \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
\int_{e^2}^{\alpha} x\ln x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} - \frac{1}{2}\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} x\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} \\
&= \frac{\alpha^2\ln\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} - \mathrm{e}^4\times\frac{2}{2} + \frac{\mathrm{e}^4}{4} \\
&= \frac{\alpha^2\ln\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} - \mathrm{e}^4 + \frac{\mathrm{e}^4}{4} \\
&= \frac{\alpha^2(2\ln\alpha - 1) - 3\mathrm{e}^4}{4}.
\end{aligned}$$

2. a. Comme la fonction est négative sur l'intervalle $[\mathrm{e}^2 ; \alpha]$, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $x = \mathrm{e}^2$ et $x = \alpha$ est égale à :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= -\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} (2x - x\ln x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} x\ln x\,\mathrm{d}x - \int_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} 2x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

b. Utilisons la relation $\ln\alpha = 2 + \dfrac{1}{\alpha}$ établie en **A.3.c** :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \frac{\alpha^2(2\ln\alpha - 1) - 3\mathrm{e}^4}{4} - \left[x^2\right]_{\mathrm{e}^2}^{\alpha} \\ &= \frac{\alpha^2(2\ln\alpha - 1) - 3\mathrm{e}^4 - 4\alpha^2 + 4\mathrm{e}^4}{4} \\ &= \frac{\alpha^2\left(4 + \dfrac{2}{\alpha} - 1\right) + \mathrm{e}^4 - 4\alpha^2}{4} \\ &= \frac{2\alpha - \alpha^2 + \mathrm{e}^4}{4} \\ &= \frac{\alpha(2-\alpha) + \mathrm{e}^4}{4}\end{aligned}$$