

Corrigé

Voie générale – spécialité J2 – Asie – 10 juin 2026

EXERCICE 1 :

5 POINTS

Partie A

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{x-2}{2x-3}$ est dérivable sur $] -\infty ; \frac{3}{2}[$ en tant que quotient de fonctions polynomiales, le dénominateur étant non nul. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (2x-3) - (x-2) \times 2}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{1}{(2x-3)^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in] -\infty ; \frac{3}{2}[$, $(2x-3)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty ; \frac{3}{2}[$.

Étudions les limites de f aux bornes de son ensemble de définition :

- Limite en $-\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-2}{2x-3} \\ &= \frac{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(2 - \frac{3}{x}\right)} \\ &= \frac{1 - \frac{2}{x}}{2 - \frac{3}{x}}, \end{aligned}$$

donc puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ (quotient de limites)

- Limite en $\frac{3}{2}$, $x < \frac{3}{2}$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{3}{2} \\ x < \frac{3}{2}}} x - 2 = -\frac{1}{2} \\ \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{3}{2} \\ x < \frac{3}{2}}} 2x - 3 = 0^- \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{3}{2} \\ x < \frac{3}{2}}} f(x) = +\infty \text{ (quotient de limites)}$$

On en déduit donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	+	
f	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

2. Sur l'intervalle $[-\infty; \frac{3}{2}]$, donc a fortiori sur l'intervalle $[0; 1]$ la fonction f est strictement croissante. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\implies f(0) \leq f(x) \leq f(1) \\ &\implies \frac{-2}{-3} \leq f(x) \leq \frac{-1}{-1} \\ &\implies \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{2}{3} \geq 0$, on en déduit que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

Partie B

1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \frac{2}{3}$. On a bien $0 \leq 0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$, soit $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. La propriété est initialisée.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
La fonction f étant strictement croissante sur $[0; 1]$, elle conserve l'ordre, on a donc :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \\ \implies f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1) \\ \implies \frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1 \end{aligned}$$

Comme $0 \leq \frac{2}{3}$, on obtient $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$. L'encadrement est vrai au rang $n + 1$.

- **Conclusion :** L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang supérieur ou égal à 0, il l'est aussi au rang suivant : par le principe de récurrence :
Pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. Le résultat précédent montre :

- que $u_n \leq u_{n+1}$ donc que la suite (u_n) est croissante et
- majorée par 1 puisque tous ses termes le sont.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite réelle ℓ vérifiant $0 \leq \ell \leq 1$.

3. La fonction f étant continue, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2x-3} = x &\iff x-2 = x(2x-3) \\ &\iff x-2 = 2x^2-3x \\ &\iff 2x^2-4x+2 = 0 \\ &\iff 2(x-1)^2 = 0 \\ &\iff (x-1)^2 = 0 \\ &\iff (x-1) = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

On en déduit que $\ell = 1$ et donc que la suite (u_n) converge vers 1.

4. La fonction `seuil(0.0001)` renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n \geq 1 - 0,0001$, c'est-à-dire $u_n \geq 0,9999$. La valeur 5 000 signifie que c'est à partir du rang $n = 5\,000$ que les termes de la suite dépassent 0,9999.
5. a. Les premiers termes sont :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_1 &= \frac{2}{3} \\ u_2 &= \frac{\frac{2}{3}-2}{2(\frac{2}{3})-3} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{5} \\ u_3 &= \frac{\frac{4}{5}-2}{2(\frac{4}{5})-3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{7}{5}} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

b. On peut conjecturer que $u_n = \frac{2n}{2n+1}$.

Démontrons-le par récurrence :

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, $\frac{2 \times 0}{2 \times 0 + 1} = \frac{0}{1} = 0 = u_0$. La propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n = \frac{2n}{2n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) = \frac{\frac{2n}{2n+1} - 2}{2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^3 - 3} \\ &= \frac{\frac{2n - 2(2n+1)}{2n+1}}{\frac{4n - 3(2n+1)}{(2n+1)^3}} \\ &= \frac{2n - 4n - 2}{\frac{4n - 6n - 3}{2n+1}} \\ &= \frac{-2n - 2}{\frac{-2n - 3}{2n+1}} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \\ &= \frac{2n+2}{2n+2+1} \\ u_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

La relation est vraie au rang $n+1$.

- La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \geq 0$, elle l'est aussi au rang $n+1$. Par le principe de récurrence on a donc montré que :

$$\text{quel que soit } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n}{2n+1}$$

EXERCICE 2

5 POINTS

Partie A

1. L'épreuve consiste en la répétition de $n = 16$ lancers francs identiques et indépendants. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli avec deux issues : succès (probabilité $p = 0,492$) ou échec. La variable aléatoire X compte le nombre de succès. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0,492$, notée $\mathcal{B}(16 ; 0,492)$.
2. L'espérance est donnée par :

$$\begin{aligned} E(X) &= n \times p \\ &= 16 \times 0,492 \\ &= 7,872 \end{aligned}$$

En moyenne, sur 16 000 tirs, le joueur réussira environ 7 872 lancers francs .

3. Calcul de la probabilité d'avoir exactement 5 succès :

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= \binom{16}{5} \times (0,492)^5 \times (1 - 0,492)^{16-5} \\ P(X = 5) &\approx 0,073 \end{aligned}$$

4. Probabilité de réussir au moins 6 lancers francs :

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &\approx 1 - 0,117 \\ P(X \geq 6) &\approx 0,883 \end{aligned}$$

Partie B

1. Le joueur effectue 3 lancers francs. La variable Y peut donc prendre les valeurs 0, 1, 2, 3.
2. Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3 ; p)$.

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 \\ &= 3p^2(1-p) \\ &= 3p^2 - 3p^3 \end{aligned}$$

3. Loi de probabilité de Y :

y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

4. Calcul de $P(Y \geq 2)$:

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= P(Y = 2) + P(Y = 3) \\ &= (3p^2 - 3p^3) + p^3 \\ &= -2p^3 + 3p^2 \end{aligned}$$

5. a. Étude de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ sur $[0 ; 1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 6x \\ &= 6x(1-x) \end{aligned}$$

Sur $[0 ; 1]$, $6x \geq 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $1-x$. Or

$$1-x > 0 \iff 1 > x.$$

On a donc pour $x \in [0 ; 1[$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

x	0	1
$f'(x)$	+	0
f	0	1

b. Sur l'intervalle $[0 ; 1]$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque $0,9 \in [0 ; 1]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,9$ admet une unique solution α sur $[0 ; 1]$.

c. À l'aide de la calculatrice :

$$\begin{aligned} f(0,80) &= 0,896 \\ f(0,81) &= 0,905 \end{aligned} \implies f(0,80) < 0,9 < f(0,81)$$

L'encadrement est donc $0,80 \leq \alpha \leq 0,81$.

d. La valeur α représente la probabilité de réussite minimale qu'un joueur doit avoir sur un lancer franc pour que sa probabilité de réussir au moins 2 lancers sur 3 soit égale à 90 %.

Exercice 3

5 points

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -1-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

b. Calculons les produits scalaires :

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{AB} &= 1 \times (-2) + 4 \times 1 + 1 \times (-2) = -2 + 4 - 2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} &= 1 \times 1 + 4 \times (-1) + 1 \times 3 = 1 - 4 + 3 = 0\end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc normal à ce plan.

c. Une équation du plan (ABC) est de la forme $x + 4y + z + d = 0$. Le point A(1 ; 2 ; 3) appartient au plan, donc :

$$1 + 4 \times 2 + 3 + d = 0 \iff 12 + d = 0 \iff d = -12$$

Une équation cartésienne est : $x + 4y + z - 12 = 0$.

2. a. La droite (d) est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(1 ; 4 ; 1)$ et passe par D(3 ; -2 ; -1). Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. Le point H appartient à (d), il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_H = 3 + t \\ y_H = -2 + 4t \\ z_H = -1 + t \end{cases}$

De plus H appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient donc l'équation du plan (ABC) : $x_H + 4y_H + z_H - 12 = 0$. On en déduit que t est solution de :

$$\begin{aligned}(3 + t) + 4(-2 + 4t) + (-1 + t) - 12 &= 0 \\ 3 + t - 8 + 16t - 1 + t - 12 &= 0 \\ 18t - 18 &= 0 \\ t &= 1\end{aligned}$$

Les coordonnées de H sont donc $x_H = 3 + 1 = 4$, $y_H = -2 + 4(1) = 2$, $z_H = -1 + 1 = 0$. Soit H(4 ; 2 ; 0).

c. La distance de D au plan (ABC) correspond à la longueur DH :

$$\begin{aligned}DH &= \sqrt{(4-3)^2 + (2-(-2))^2 + (0-(-1))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

3. a. On sait que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= -2(1) + 1(-1) - 2(3) = -9 \\ AB &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \\ AC &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}-9 &= 3 \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC}) \\ \cos(\widehat{BAC}) &= \frac{-9}{3\sqrt{11}} = \frac{-3}{\sqrt{11}} = \frac{-3\sqrt{11}}{11}\end{aligned}$$

b. Sachant que $\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1$:

$$\begin{aligned}\sin^2(\widehat{BAC}) &= 1 - \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}\end{aligned}$$

L'angle $\widehat{BAC}$ étant dans $[0 ; \pi]$, son sinus est positif : $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

c. L'aire du triangle ABC est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC}) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{11} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

4. Le volume du tétraèdre ABCD est :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times DH \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{18}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

Exercice 4

5 points

1. Affirmation 1 : Fausse.

Calculons la dérivée seconde de $f(x) = (-0,5x + 3)^5$. (on rappelle que $(u^n)' = nu^{n-1}u'$)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 5 \times (-0,5) \times (-0,5x + 3)^4 = -2,5(-0,5x + 3)^4 \\ f''(x) &= -2,5 \times 4 \times (-0,5) \times (-0,5x + 3)^3 = 5(-0,5x + 3)^3\end{aligned}$$

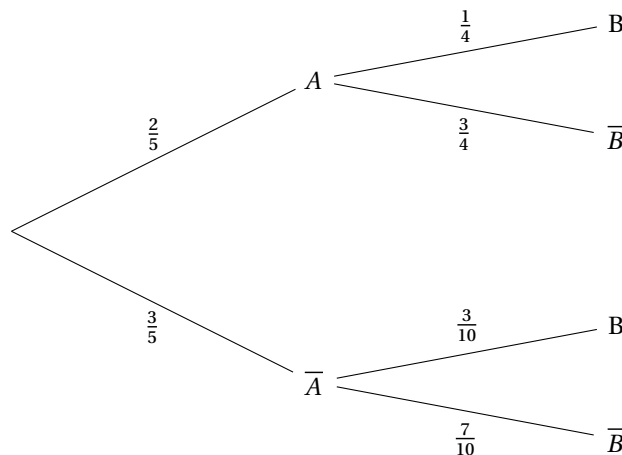
Pour $x = 10$, on a $f''(10) = 5(-5 + 3)^3 = 5(-8) = -40 < 0$. La dérivée seconde n'est pas positive sur tout $\mathbb{R}$, la fonction n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Affirmation 2 : Vraie.

Il y a 4 multiples de 8 parmi les 32 jetons $\{8, 16, 24, 32\}$. Le nombre de tirages contenant au moins un multiple de 8 est le nombre total de tirages moins le nombre de tirages ne contenant aucun multiple de 8 (tirage parmi les 28 autres jetons).

$$\begin{aligned}\text{Nombre total} &= \binom{32}{5} = 201376 \\ \text{Sans multiple de 8} &= \binom{28}{5} = 98280 \\ \text{Au moins un} &= 201376 - 98280 = 103096\end{aligned}$$

3. Affirmation 3 : Fausse. Complétons l'arbre fourni par l'énoncé.



On peut dans un premier temps calculer $p(B)$ par la formule de probabilités totales :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} + \frac{9}{50} = \frac{14}{50}$$

On en déduit que :

$$p_B(\overline{A}) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{14}{50}} = \frac{9}{14}$$

4. Affirmation 4 : Vraie.

Vérifions si $h(x) = e^{-x} \sin(x)$ vérifie $h'(x) + h(x) = e^{-x} \cos(x)$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x) \\ h'(x) + h(x) &= (-e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x)) + e^{-x} \sin(x) \\ h'(x) + h(x) &= e^{-x} \cos(x) \end{aligned}$$

La fonction h est bien une solution particulière.

5. Affirmation 5 : Fausse.

Les solutions de (E) sont la somme de la solution particulière $h(x)$ et des solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ce^{-x} . L'ensemble des solutions de (E) est donc constitué des fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-x} + e^{-x} \sin(x)$, ce qui est différent de l'expression proposée.