

❧ Baccalauréat épreuve de spécialité (terminale) ❧

Voie générale – spécialité J2 – Métropole – 9 septembre 2026

A. P. M. E. P.

Corrigé

Exercice 1

5 points

Partie A

1. a. On considère l'expérience aléatoire « la joueuse effectue un lancer franc ». C'est une épreuve de Bernoulli dont le succès est l'évènement « la joueuse réussit son lancer ». La probabilité du succès est $p = 0,6$.

On répète cette expérience $n = 5$ fois de manière identique et indépendante donc la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,6$ et $n = 5$.

- b. $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$.

La calculatrice donne $P(X \geq 4) \approx 0,34$. Cela signifie que pour environ 34 % des séries de 5 lancers francs de cette joueuse à l'entraînement, elle réussit au moins 4 des 5 lancers.

2. a. $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1)$ On a donc bien : $P(Y \geq$

$$= 1 - P(Y = 0) \quad \text{car } Y \text{ prend des valeurs entières entre 0 et } n.$$

$$= 1 - \binom{n}{0} \times 0,6^0 \times 0,4^n$$

$$= 1 - 0,4^n$$

$$1) = 1 - 0,4^n.$$

- b. Ici, on cherche n tel que $P(Y \geq 1) \geq 0,9999$.

$$P(Y \geq 1) \geq 0,9999 \iff 1 - 0,4^n \geq 0,9999$$

$$\iff -0,4^n \leq -0,0001$$

$$\iff 0,4^n \leq 0,0001 \quad \text{car } -1 < 0$$

$$\iff n \ln(0,4) \leq \ln(0,0001)$$

$$\iff n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,4)} \quad \text{car } \ln(0,4) < 0$$

$$\text{Or } \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,4)} \approx 10,052.$$

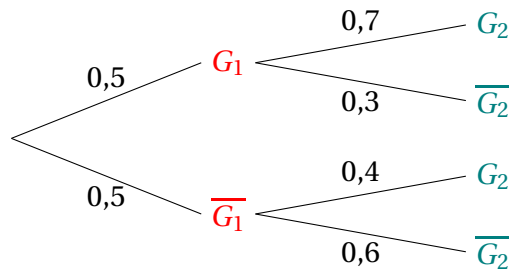
À partir de 11 lancers, la probabilité d'en réussir au moins un est supérieure à 0,9999.

- c. Voici le script Python complété :

```
def basket():
    p = 0.6
    n = 1
    while p < 0.9999 :
        n = n + 1
        p = 1 - 0.4**n
    return n
```

Partie B

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre de probabilité



G_1 et $\overline{G_1}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
 P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2) \\
 &= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,4 \\
 &= 0,55
 \end{aligned}$$

2. a. **Initialisation.** Pour $n = 1$, on a $p_1 = 0,5$ et $p_2 = 0,55$.

On vérifie que $p_1 \leq p_2$ donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. Soit n un entier naturel non nul ($n \geq 1$), on suppose que l'inégalité est vraie pour cet entier n . Il faut démontrer que, pour cet entier $n \geq 1$, si $p_n \leq p_{n+1}$ alors $p_{n+1} \leq p_{n+2}$.

D'après l'hypothèse de récurrence : $p_n \leq p_{n+1} \Rightarrow 0,3p_n \leq 0,3p_{n+1}$ car $0,3 > 0$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 0,3p_n + 0,4 \leq 0,3p_{n+1} + 0,4 \\
 &\Rightarrow p_{n+1} \leq p_{n+2}
 \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

On a donc pour tout $n \geq 1$, $p_n \leq p_{n+1}$.

Autrement dit, la suite (p_n) est croissante.

b. p_n est la probabilité que le joueur réussisse son n -ième lancer franc, on a donc $0 \leq p_n \leq 1$.

La suite (p_n) est bornée par 0 et 1, et donc elle est majorée par 1.

c. D'après les deux questions précédentes, la suite (p_n) est croissante et majorée par 1 : on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite inférieure ou égale à 1.

3. Le fait que la limite de (p_n) quand n tend vers $+\infty$ est $\frac{4}{7}$ signifie qu'après un grand nombre de lancers francs, ce joueur va réussir en moyenne 4 lancers sur 7.

Exercice 2

5 points

1. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$,
par limite du produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, sous cette forme, on a donc une forme indéterminée.

Mais, pour tout x réel, on a : $f(x) = (3x - 1)e^{-x} + 2 = -3(-x)e^{-x} - e^{-x} + 2$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$, d'après la propriété des croissances comparées.

On obtient alors, par limite de la somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3. a. On a, pour tout réel x : $f'(x) = 3 \times e^{-x} + (3x - 1) \times (-e^{-x})$.

Soit $f'(x) = e^{-x}(3 - (3x - 1)) = (-3x + 4)e^{-x}$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de f' est le même que celui de $-3x + 4$.

Or $-3x + 4 \geq 0 \iff x \leq \frac{4}{3}$.

De plus, on a : $f\left(\frac{4}{3}\right) = 3e^{-\frac{4}{3}} + 2$.

On obtient le tableau de variations

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
variation de f	$-\infty$	$3e^{\frac{4}{3}} + 2$	2

4. a. Sur l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; +\infty\right]$, la fonction f est strictement positive (elle est minorée par 2), donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$, la fonction f est dérivable donc continue. Elle est strictement croissante sur cet intervalle.

De plus, l'image de l'intervalle $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$ est l'intervalle $\left]-\infty; 3e^{\frac{4}{3}} + 2\right]$ avec $3e^{\frac{4}{3}} + 2 > 0$.

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$.

En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

b. On sait que $\alpha \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$

La calculatrice permet d'obtenir :

$f(-1) \approx -8,87$ et $f(0) = 1$ donc $-1 < \alpha < 0$

$f(-0,3) \approx -0,56$ et $f(-0,2) \approx -0,046$ donc $-0,3 < \alpha < -0,2$

$f(-0,21) \approx -0,01$ et $f(-0,2) \approx -0,046$ donc $-0,21 < \alpha < -0,2$

$f(-0,209) \approx -0,005$ et $f(-0,208) \approx -0,0005$ donc $-0,209 < \alpha < -0,208$

On en déduit que $\alpha \approx -0,21$. (Remarque : on peut se contenter de donner la valeur approchée renvoyée par le mode « résolution d'équation » de la calculatrice).

c. Par lecture du tableau de variation, on obtient le tableau de signes suivant

x	$-\infty$	α	$+\infty$
signe de f	$-$	0	$+$

d. Sur l'intervalle $[0 ; 2]$, la fonction f est positive donc l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe de abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est $\mathcal{A} = \int_0^2 f(x) dx$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^2 f(x) dx \\ &= \left[F(x) \right]_0^2 \\ &= F(2) - F(0) \\ &= -8e^2 + 4 + 2 \\ &= 6 - 8e^2\end{aligned}$$

L'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe de abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ mesure $6 - 8e^2$ unités d'aire.

5. On remarque que l'inéquation est : $f(x) \leq 4x + 1$.

Graphiquement, cela correspond au fait que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0, et ce pour tout réel x : cela fait penser à étudier la convexité de la fonction f .

On va donc déterminer la dérivée seconde de f :

On a, pour tout x réel : $f''(x) = -3e^{-x} + (-3x + 4) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(-3 - (-3x + 4)) - e^{-x}(3x - 7)$.

La dérivée seconde f'' est strictement négative quand $3x - 7$ est strictement négatif soit sur $\left] -\infty ; \frac{7}{3} \right[$.

On en déduit que sur $\left] -\infty ; \frac{7}{3} \right[$, f est concave donc sa courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de toutes ses tangentes. En particulier, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

On a donc, pour tout $x \in \left] -\infty ; \frac{7}{3} \right[$, $(3x - 1)e^{-x} + 2 \leq 4x + 1$.

Sur $\left[\frac{7}{3} ; +\infty \right[$, la fonction $x \mapsto 4x + 1$ est croissante donc $4x + 1 \geq 4 \times \frac{7}{3} + 1$ soit $4x + 1 \geq \frac{29}{3}$.

Sur $\left[\frac{7}{3} ; +\infty \right[$, la fonction f est décroissante donc $f(x) \leq f\left(\frac{7}{3}\right)$ or $f\left(\frac{7}{3}\right) \leq \frac{29}{3}$, d'après la concavité de f sur $\left] -\infty ; \frac{7}{3} \right[$.

On en conclut que pour tout $x \in \left[\frac{7}{3} ; +\infty \right[$, $f(x) \leq 4x + 1$.

Exercice 3

5 points

1. Affirmation 1 :

f est dérivable et, pour tout x réel : $f(x) = (x-2)e^x$

donc, pour tout x réel : $f'(x) = 1 \times e^x + (x-2) \times e^x = (x-1)e^x$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, pour tout réel } x, \quad f'(x) - 2f(x) &= (x-1)e^x - 2(x-2)e^x \\ &= (-x+3)e^x \\ &= -(x-3)e^x \end{aligned}$$

L'affirmation est **fausse**.

2. Affirmation 2 :

On pose, pour tout x réel, $v(x) = 2x+1$ et $u'(x) = \cos x$.

On a alors, pour tout x réel : $v'(x) = 2$ et on peut choisir $u(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} \text{Par intégration par parties, on a : } \int_0^\pi f(x) dx &= \left[(2x+1) \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \sin x dx \\ &= \left((2\pi+1) \sin \pi - \sin 0 \right) - \left[-2 \cos x \right]_0^\pi \\ &= 0 + 2 \cos \pi - 2 \cos 0 \\ &= -4 \end{aligned}$$

L'affirmation est **fausse**.

3. Affirmation 3 :

- La fonction du second degré $x \mapsto 2x^2 - 6x - 56$ admet deux racines : -4 et 7 .
Le coefficient du terme de degré 2 est $a = 2$ donc cette fonction est strictement positive sur $]7; +\infty[$.
- La fonction affine $x \mapsto 4x - 8$ est strictement positive sur $]2; +\infty[$.

On peut résoudre l'inéquation sur l'intervalle $]7; +\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]7; +\infty[, \quad \ln(2x^2 - 6x - 56) \geq \ln(4x - 8) \iff 2x^2 - 6x - 56 \geq 4x - 8 \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^{*+}$$

$$\iff 2x^2 - 10x - 48 \geq 0$$

$$\iff x^2 - 5x - 24 \geq 0 \quad \text{car } 2 > 0$$

Le discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac = 121$, donc la fonction du second degré $x \mapsto x^2 - 5x - 24$ admet deux racines : -3 et 8 .

Le coefficient du terme de degré 2 est $a = 1$, donc cette fonction est positive sur $] -\infty; -3] \cup [8; +\infty[$.

Sur $]7; +\infty[$, l'inéquation a pour ensemble de solutions l'intervalle $[8; +\infty[$.

L'affirmation est **vraie**.

4. Affirmation 4 :

Soit n un entier naturel :

$$v_{n+1} = \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{2}{\frac{3u_n}{5u_n+3}} = 2 \times \frac{5u_n+3}{3u_n} = 2 \times \left(\frac{5u_n}{3u_n} + \frac{3}{3u_n} \right) = 2 \times \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{u_n} \right) = \frac{10}{3} + \frac{2}{u_n} = \frac{10}{3} + v_n.$$

On reconnaît la relation de récurrence d'une suite arithmétique, de raison $r = \frac{10}{3}$.

L'affirmation est **vraie**.

5. Affirmation 5 :

On considère l'expérience aléatoire « obtenir un 6 en lançant un dé équilibré à 6 face numéroté de 1 à 6. » a deux issues : le succès de probabilité $\frac{1}{6}$ et l'échec de probabilité $\frac{5}{6}$. Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli.

La variable aléatoire qui compte le nombre de succès (les apparitions du 6) quand on répète 3 600 fois cette épreuve suit la loi binomiale de paramètre $p = \frac{1}{6}$ et $n = 3 600$.

On a alors $E(X) = \frac{1}{6} \times 3600 = 600$, et $V(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times 3600 = 500$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $t > 0$, on a : $P(|X - 600| \geq t) \leq \frac{500}{t^2}$.

Or $P(450 < X < 750) = P(|X - 600| < 150) = 1 - P(|X - 600| \geq 150)$.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $t = 150$, on obtient donc :

$$P(|X - 600| \geq 150) \leq \frac{500}{150^2}$$

On en déduit que $P(450 < X < 750) \geq 1 - \frac{500}{150^2}$.

Or, $1 - \frac{500}{150^2} \approx 0,978$.

On peut donc conclure : $P(450 < X < 750) \geq 0,97$.

L'affirmation est **vraie**.

Exercice 4**5 points****Partie A**

1. On a $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

Puisque $\frac{0}{2,5} \neq \frac{3}{7}$, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires et les points R, S et T ne sont pas alignés.

2. a. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires donc ils forment une base du plan (RST).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{RS} = 0 + 12 - 12 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{RT} = -25 + 28 - 3 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base du plan (RST) donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (RST).

b. Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (RST) donc une équation du plan (RST) est de la forme $-10x + 4y + 3z + d = 0$.

Le point R(1; 0; 6) appartient au plan (RST) donc on doit avoir $-10 \times 1 + 4 \times 0 + 3 \times 6 + d = 0$ soit $d = -8$.

Ainsi, l'équation $-10x + 4y + 3z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (RST).

3. a. On a $-10x_A + 4y_A + 3z_A - 8 = -10 \times (2,5) + 4 \times 8 + 3 \times 4,5 - 8 = -25 + 32 + 13,5 - 8 \neq 0$.

On en déduit que A n'appartient pas à (RST).

- b. Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (RST) donc c'est un vecteur directeur de la droite d_1 .

De plus, $A(-2,5; 8; 4,5) \in d_1$ donc une représentation paramétrique de d_1 est

$$\begin{cases} x = -2,5 - 10t \\ y = 8 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- c. $A \in d_1$ et d_1 est orthogonale au plan (RST) donc le projeté orthogonal de A sur (RST) est le point d'intersection de d_1 et de (RST).

Puisque $-10 \times (2,5) + 4 \times 6 + 3 \times 3 - 8 = -25 + 24 + 9 - 8 = 0$, le point de coordonnées $(2,5; 6; 3)$ appartient à (RST).

Puisque le système $\begin{cases} 2,5 = -2,5 - 10t \\ 6 = 8 + 4t \\ 3 = 4,5 + 3t \end{cases}$ admet pour solution $t = -\frac{1}{2}$, le point de coordonnées $(2,5; 6; 3)$ appartient à d_1 .

Le point de coordonnées $(2,5; 6; 3)$ appartient à d_1 et à (RST) (qui sont sécants) donc ce point est le point d'intersection de d_1 et (RST). C'est le point H, projeté orthogonal de A sur (RST).

4. a. $\vec{SR} \cdot \vec{ST} = 0 \times 2,5 - 3 \times 4 + 4 \times 3 = 0$

Les vecteurs $\vec{SR}$ et $\vec{ST}$ sont orthogonaux donc les droites (SR) et (ST) sont orthogonales (et perpendiculaires, car sécantes en S) et le triangle RST est rectangle en S.

- b. Pour calculer le volume du tétraèdre, on choisit le triangle RST comme base et la hauteur associée est la droite (AH).

$$\text{Ainsi } V_{ARST} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} SR \times ST \times AH$$

$$\text{Or } SR = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = 5,$$

$$ST = \sqrt{2,5^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{31,25},$$

$$\text{et } AH = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-1,5)^2} = \sqrt{31,25}.$$

$$\text{Donc } V_{ARST} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{31,25} \times \sqrt{31,25} = \frac{625}{24}.$$

Comme l'unité graphique du repère est le centimètre, toutes les longueurs ont été exprimées en centimètre, et l'unité de volume est bien le cm^3 , on a bien $V_{ARST} = \frac{625}{24} \text{ cm}^3$.

Partie B

1. $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2 = (-2 + s)^2 + (-4 - 4s)^2 + (1 - 2s)^2$
 $= 4 - 4s + s^2 + 16 + 32s + 16s^2 + 1 - 4s + 4s^2 = 21s^2 + 24s + 21$

On arrive bien à l'expression souhaitée.

2. La fonction du second degré $x \mapsto 21s^2 + 24s + 21$ admet un minimum en $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{7}$.

Ainsi la distance est minimale pour $s = -\frac{4}{7}$ soit pour $M\left(-\frac{71}{14}; \frac{44}{7}; \frac{61}{14}\right)$.