# Brevet de technicien supérieur groupement B2
# 10 mai 2021 - Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie

**Exercice 1** **10 points**

Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère.
Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage.

On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant $t$ exprimé en seconde.
On suppose que $f$ est une fonction de la variable réelle $t$ définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante**

**A. Résolution d'une équation différentielle**

Une étude mécanique montre que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' + 3y' + 2y = 4,$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $t$, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, $y'$ la fonction dérivée de $y$ et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 3r + 2 = 0$,
   **b.** En déduire les solutions de l'équation différentielle

   $$(E_0): \quad y'' + 3y' + 2y = 0.$$

   On fournit les formules suivantes.

| Équations | Solutions sur un intervalle $I$ |
|---|---|
| Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$, Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant $\Delta$. | Si $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t}$ où $r_1$ et $r_2$ sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{rt}$ où $r$ est la racine double de l'équation caractéristique, Si $\Delta < 0$, $y(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]\mathrm{e}^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique. |

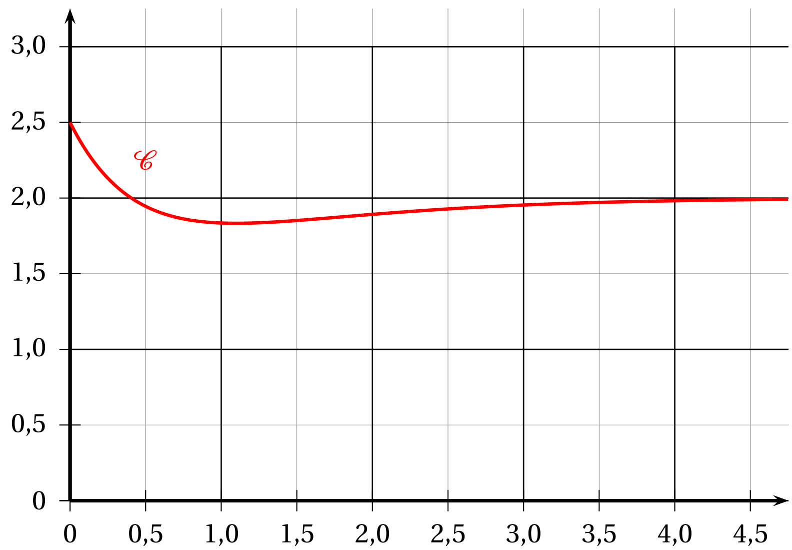
2. Soit $k$ un nombre réel. On définit la fonction constante $g$ sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = k$.
   Déterminer $k$ pour que la fonction $g$ soit solution de l'équation différentielle $(E)$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

**B. Étude de la fonction $f$**

On admet que la fonction $f$ correspondant à la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère est définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1,5\mathrm{e}^{-2t} + 2.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.




**1.** Déterminer la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$.

**2.** On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$.

**a.** Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

**b.** En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.

**3.** **a.** À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la fonction $f$ sur $[0~;~+\infty]$.

**b.** Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une expression de la dérivée $f'$ de la fonction $f$. Ce résultat est admis.

| | |
|---|---|
| 1 | $f(t) : -\mathrm{e}^{-t} + 1,5\mathrm{e}^{-2t} + 2$ |
| | $\rightarrow f(t) := -\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} + 2$ |
| 2 | Dérivée$(f(t), t)$ |
| | $\rightarrow \mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-2t}$ |

Montrer que cette dérivée peut aussi s'écrire : $f'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left(\mathrm{e}^{t} - 3\right)$.

**c.** Résoudre sur $[0~;~+\infty]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{t} - 3 \geqslant 0$.

**d.** En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0~;~+\infty]$.

**e.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ sur $[0\ ;\ +\infty]$.

## C. Étude locale

On rappelle que la fonction $f$ est définie sur $[0\ ;\ +\infty]$ par

$$f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1,5\mathrm{e}^{-2t} + 2$$

et que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée dans la partie B.
Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f$ au voisinage de zéro.

3 PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$

$$\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2$$

**1.** *Les deux questions suivantes sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
*La réponse juste rapporte 1 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

**a.** Le développement limité de la fonction $f$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est :

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2$ | $\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty} \epsilon(t) = 0$ | $\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$ |

**b.** Une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

| | | |
|---|---|---|
| $y = \frac{5}{2}$ | $y = \frac{5}{2} - 2t$ | $y = \frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2$ |

**2.** Étudier la position relative, au voisinage du point d'abscisse 0, de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $T$.

**EXERCICE 2** **10 points**

Soit la fonction $f$, paire et périodique de période $2\pi$, telle que, pour tout $t$ de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, $f(t) = t$.
Cette fonction modélise un signal triangulaire.

1. Tracer sur la feuille de copie, dans un repère orthonormal, la représentation graphique de $f$ sur l'intervalle $[-2\pi\,;\,2\pi]$.
2. Soit $s(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$ le développement en série de Fourier associé à $f$.

   *Un formulaire sur les séries de Fourier figure à la page suivante*

   **a.** Calculer $\omega$.
   **b.** Calculer $a_0$.
   **c.** Justifier que $b_n = 0$ pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1.
   **d.** À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient : $a_n = 2\left(\dfrac{\cos(n\pi)}{n^2\pi} - \dfrac{1}{n^2\pi}\right)$ pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 1.
   Ce résultat est admis et ne doit pas être démontré.
   Calculer $a_1$ , $a_2$ et $a_3$ . On donnera les valeurs exactes.
   **e.** Le début du développement en série de Fourier de $f$ à l'ordre $n$ est noté :

   $$s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right).$$

   Donner les expressions de $s_1(t)$ et de $s_3(t)$.
3. On admet que : $s_3(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\cos(t) - \dfrac{4}{9\pi}\cos(3t)$.
   Recopier et remplir le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à $10^{-2}$ :

| $t$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1(t)$ | | | | | | | | |
| $s_3(t)$ | | | | | | | | |

4. **a.** La valeur efficace $F$ du signal sur une période est donnée par la formule :

   $$F^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que $F = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.
   **b.** D'après la formule de Parseval, les valeurs efficaces $S_1$ et $S_3$ des fonctions $s_1$ et $s_3$ vérifient les égalités :

   $$(S_1)^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}a_1^2 \quad \text{et} \quad (S_3)^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{3} \frac{a_n^2}{2}.$$

Calculer une valeur approchée à $10^{-4}$ près de chacun des rapports $\dfrac{S_1}{F}$ et $\dfrac{S_3}{F}$.

Ranger par ordre croissant les trois nombres : 1, $\dfrac{S_1}{F}$ et $\dfrac{S_3}{F}$. Commenter.

**Formulaire sur les séries de Fourier**

$f$ : fonction périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right),\ (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t\ \ (n \in \mathbb{N}^*)\,;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$