BTS Métropole mai 2022
Groupement B2 [1]

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 **10 points**

Un chariot d'une fête foraine est propulsé à une vitesse de 20 m.s^{-1} sur un axe horizontal, puis il est ralenti par un système de freinage.
On s'intéresse à la vitesse du chariot durant le freinage.
On note $f(t)$ la vitesse du chariot à l'instant t.
$f(t)$ est exprimé en mètre par seconde, et t est exprimé en seconde.
L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le chariot commence à être pris en charge par le système de freinage. On a donc $f(0) = 20$.
On suppose que f est une fonction dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A - Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + 0,8y = 4,$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + 0,8y = 0$.
   On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-at}$

   b. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 5$.
   Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).
   c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. On rappelle que $f(0) = 20$.
   Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale : $f(0) = 20$.

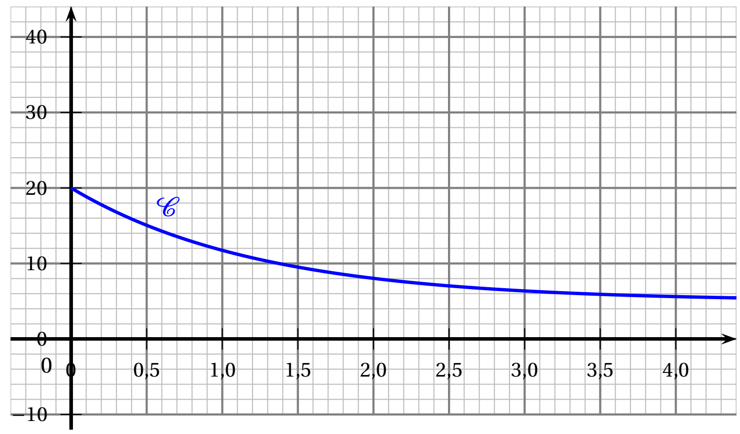
Partie B - Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = 15\mathrm{e}^{-0,8t} + 5.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

1. Conception et industrialisation en microtechniques, Électrotechnique



1. **a.** Démontrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. On admet que, pour tout réel t appartenant à $[0~;~+\infty[$ on a :

$$f'(t) = -12\text{e}^{-0,8t}.$$

   Dresser le tableau de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.

3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

4. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(t) = -18,75\text{e}^{-0,8t} + 5t$.

   a. Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

   b. On admet que la distance d, exprimée en mètre, parcourue par le chariot entre les instants t_0 et t_1 est donnée par :

$$d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\text{d}t.$$

   Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre l'instant $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner une valeur arrondie au centimètre.

Partie C – Étude locale

On rappelle que l'on étudie la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = 15\text{e}^{-0,8t} + 5.$$

On rappelle que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est reproduite au début de la partie B.
Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de 0.

1	PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$ $\leftarrow 20 - 12t + \dfrac{24}{5}t^2$

1. Cette question est une question à choix multiple. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.

   Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de rapporte ne rapporte ni n'enlève de point.

   Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de zéro est :

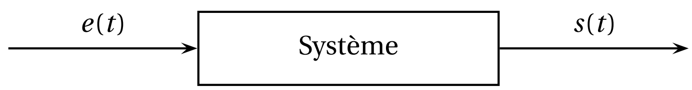
$20-12t+\dfrac{24}{5}t^2+\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$	$20+\dfrac{24}{5}t^2$	$20-12t+4,8t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

2. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Exercice 2 — 10 points

La fonction échelon unité $\mathscr{U}$ est définie par $\begin{cases} \mathscr{U}(t)=0 & \text{si} \quad t<0 \\ \mathscr{U}(t)=1 & \text{si} \quad t\geqslant 0 \end{cases}$.

On considère le système électrique entrée-sortie schématisé ci-dessous.
On note $s(t)$ le signal de sortie associé au signal d'entrée $e(t)$.



Les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t<0$.
On admet que les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ admettent des transformées de Laplace notées respectivement $E(p)$ et $S(p)$.
La fonction de transfert $H(p)$ du système est définie par $S(p)=H(p)\times E(p)$.
On a $e(t)=2\mathscr{U}(t)-\mathscr{U}(t-1)$ et $H(p)=\dfrac{1}{p+1}$.

On pourra utiliser le formulaire ci-dessous.

Partie A - signal d'entrée

1. Sur le **document-réponse à rendre avec la copie**, tracer la courbe représentative de la fonction $e(t)$.
2. Déterminer $E(p)$.

Partie B - signal de sortie

1. Démontrer que $S(p)=\dfrac{2}{p(p+1)}-\left(\dfrac{1}{p(p+1)}\right)\mathrm{e}^{-p}$.
2. Vérifier que $\dfrac{1}{p(p+1)}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+1}$.
3. Donner $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$, $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}\right)$, $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\cdot\mathrm{e}^{-p}\right)$ et $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+1}\cdot\mathrm{e}^{-p}\right)$.

4. En déduire l'expression de $s(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.
5. On admet que sur $[1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$s(t) = (\mathrm{e}-2)\mathrm{e}^{-t}+1.$$

   a. Calculer $s(1)$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.
   b. Sur le **document-réponse à rendre avec la copie**, compléter la courbe représentative de la fonction s.
   c. Donner la limite de la fonction s en $+\infty$.

FORMULAIRE POUR L'EXERCICE 2

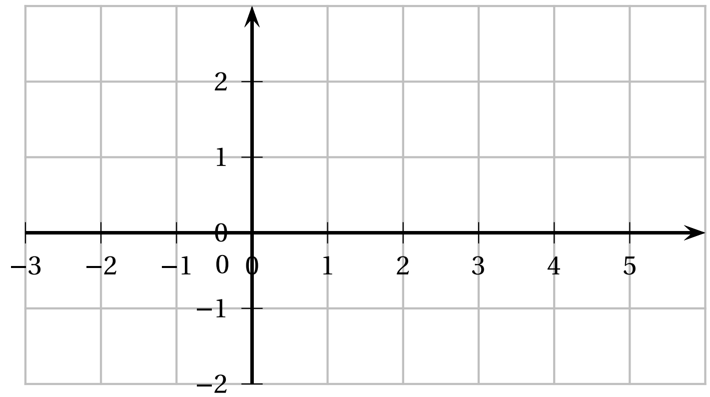
Transformation de Laplace	
Fonction	Transformée de Laplace
$t \longmapsto \mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$
$t \longmapsto \mathcal{U}(t-a)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
Propriétés	
Fonction	Transformée de Laplace
$t \longmapsto f(t)\mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto F(p)$
$t \longmapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto F(p+a)$
$t \longmapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto pF(p)-f(0^+)$

DOCUMENT -RÉPONSE

(À rendre avec la copie)

EXERCICE 2

Partie A question 1.



EXERCICE 2

Partie B question 5. b.