BTS Métropole 14 mai 2024

Groupement B3 [1]

Durée : 2 heures

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 **10 points**

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + 0,06y = 2,1,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre sur $[0~;~+\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E_0) : \quad y' + 0,06y = 0.$$

   On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\text{e}^{-at}$

2. On considère la fonction constante g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = 35$.
   Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.
   En déduire que la fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = -35\text{e}^{-0,06t} + 35.$$

1. Électrotechnique

Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = -35\mathrm{e}^{-0,06t} + 35.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de t jours de séchage.

1. Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage ? Après 72 heures ?
   Arrondir au dixième.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel t appartenant à $[0~;~+\infty[$, on a :
   $$f'(t) = 2,1\mathrm{e}^{-0,06t}.$$
3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0~;~+\infty[$ et en déduire le sens de variations de f
4. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.
   Cette affirmation est-elle juste ?
6. On considère la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par
   $$F(t) = \left(\frac{1\,750}{3}\right)\mathrm{e}^{-0,06t} + 35t.$$
   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
7. Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours.
   On fournit la formule suivante :

La valeur moyenne M d'une fonction h sur l'intervalle $[a~;~b]$ est définie par : $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t.$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

1. Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes 3 et 4.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que ...
Ligne 4	$\quad t \leftarrow \ldots$
Ligne 5	$\quad R \leftarrow -35\mathrm{e}^{-0,06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. Donner la valeur de N. Expliquer la démarche suivie.

Exercice 2 **10 points**

Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.

On étudie le fonctionnement d'un filtre.
La tension en entrée du filtre est une fonction E pour laquelle on possède les informations suivantes :

- E est une fonction périodique de période $T = 20$.
- $E(t) = \begin{cases} 12 & \text{si} \quad t \in [0\,;\,10[\\ 0 & \text{si} \quad t \in [10\,;\,20[. \end{cases}$

1. On note ω la pulsation de la fonction E.
   Vérifier que $\omega = \dfrac{\pi}{10}$.
2. Représenter la courbe de la fonction E sur votre copie en respectant les consignes suivantes :
   - Échelle des abscisses : 2 cm pour représenter l'intervalle allant de $t = 0$ à $t = 10$.
   - Échelle des ordonnées : 1 cm pour représenter l'intervalle allant de $E = 0$ à $E = 2$.
   - La représentation est effectuée pour $t \in [-30\,;\,30]$.
3. Déterminer la valeur moyenne a_0 de E.
4. On rappelle que la valeur efficace de E, notée E_{eff} est donnée par :
   $$(E_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [E(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$
   Montrer que $E_{\text{eff}} = 6\sqrt{2}$.
5. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $a_n = 0$.
6. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$b_n = \frac{12}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right].$$
   Montrer que, lorsque n est pair, on a $b_n = 0$.
7. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Les valeurs seront arrondies à 0,01.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n							

8. On considère la grandeur E_7 définie par :
   $$(E_7)^2 = (a_0)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}\left[(a_k)^2 + (b_k)^2\right]$$
   Commenter l'affirmation suivante :
   « E_7 représente une approximation de E_{eff} avec moins de 5 % d'erreur ».

FORMULAIRE sur les séries de Fourier

f est une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction f :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t. \quad (n \geqslant 1)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t. \quad (n \geqslant 1)$$

La valeur efficace du signal f est notée f_{eff}. Elle est donnée par :

$$\left(f_{\text{eff}}\right)^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

→ Lorsque la fonction f est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \geqslant 1)$$