BTS Métropole 14 mai 2024

Groupement B4 [1]

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 **10 points**

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' + 0,06y = 2,1,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre sur $[0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E_0): \quad y' + 0,06y = 0.$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-at}$

2. On considère la fonction constante g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 35$.
Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.
En déduire que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = -35\mathrm{e}^{-0,06t} + 35.$$

1. Systèmes phoniques

Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = -35\text{e}^{-0,06t} + 35.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de t jours de séchage.

1. Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage ? Après 72 heures ?
   Arrondir au dixième.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel t appartenant à $[0~;~+\infty[$, on a :

   $$f'(t) = 2,1\text{e}^{-0,06t}.$$
3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0~;~+\infty[$ et en déduire le sens de variations de f
4. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.
   Cette affirmation est-elle juste ?
6. On considère la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par

   $$F(t) = \left(\frac{1750}{3}\right)\text{e}^{-0,06t} + 35t.$$

   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
7. Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours.
   On fournit la formule suivante :

La valeur moyenne M d'une fonction h sur l'intervalle $[a~;~b]$ est définie par : $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b h(t)\,\text{d}t.$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

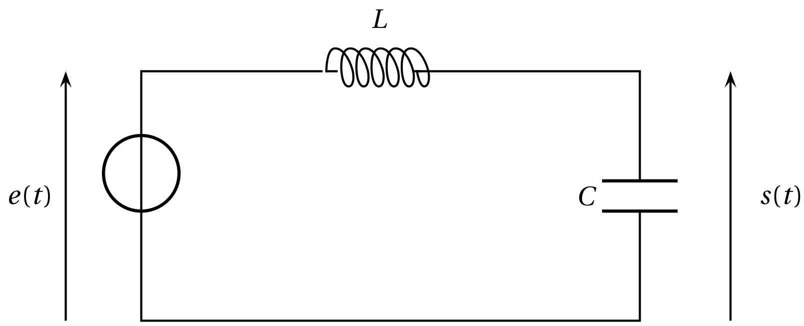
1. Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes 3 et 4.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que ...
Ligne 4	$\quad t \leftarrow \ldots$
Ligne 5	$\quad R \leftarrow 35\text{e}^{-0,06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. Donner la valeur de N. Expliquer la démarche suivie.

Exercice 2 **10 points**

Un formulaire sur les transformées de Laplace est placé à la fin de l'exercice



On considère un circuit LC.
Le signal d'entrée est noté $e(t)$. Le signal de sortie est noté $s(t)$.
Le système est régi par l'équation différentielle

$$(E): \quad LCs''(t) + s(t) = e(t).$$

Les conditions initiales sont : $s\left(0^+\right) = 0$ et $s'\left(0^+\right) = 0$.

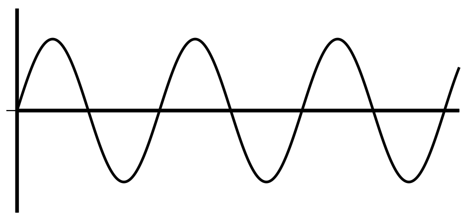
1. On sait que $L = 10$ H et $C = 10^{-5}$ F.
   Réécrire alors l'équation différentielle (E).
2. On suppose que :
   La fonction $e(t)$ admet une transformée de Laplace notée $E(p)$
   La fonction $s(t)$ admet une transformée de Laplace notée $S(p)$.
   Démontrer que l'on a : $\left(10^{-4}p^2 + 1\right)S(p) = E(p)$.
3. La fonction de transfert $H(p)$ est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.
   Démontrer que l'on a :
   $$H(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4}.$$
4. On note $\mathcal{U}(t)$ la fonction échelon unité définie ainsi : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$
   On suppose désormais que l'on a : $e(t) = 3\mathcal{U}(t)$.
   Représenter graphiquement sur votre copie le signal $e(t)$ en prenant pour échelle 1 cm pour chaque axe.
5. Donner l'expression de $E(p)$.
6. À l'aide des questions précédentes, déterminer $S(p)$ puis démontrer que l'on a :
   $$S(p) = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4}.$$
7. En déduire l'expression de $s(t)$.

8. On admet que l'on a :

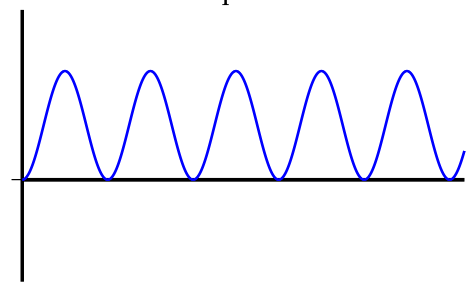
$$s(t) = 3\mathscr{U}(t)[1 - \cos(100t)].$$

Indiquer, sans justifier, lequel des croquis ci-dessous représente la courbe de la fonction $s(t)$.

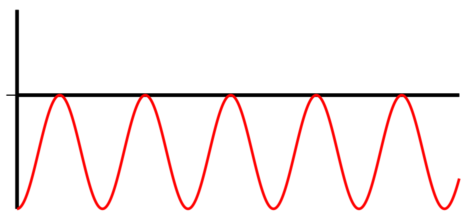
Croquis n° 1



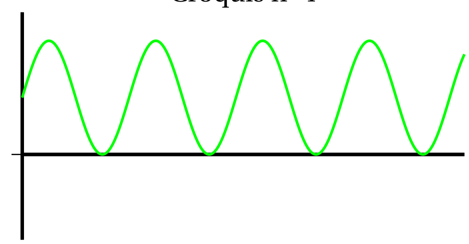
Croquis n° 2



Croquis n° 3



Croquis n° 4



FORMULAIRE

Fonction	Transformée de Laplace
$t \longmapsto \mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$
$t \longmapsto t\mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p^2}$
$t \longmapsto t^2\mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{2}{p^3}$
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t),\ a \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
$t \longmapsto \mathcal{U}(t-a)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto \sin(\omega t)\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$t \longmapsto \cos(\omega t)\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
Dans ce qui suit, $f(t)$ est une fonction possédant une transformée de Laplace notée $F(p)$.	
$t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t),\ a \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto F(p+a)$
$t \longmapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a),\ a \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
Si de plus f est dérivable $t \longmapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
Si de plus f' est dérivable $t \longmapsto f''(t)\mathcal{U}(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$

Exercice 3 — 6 points

Une usine produit des ampoules pour voitures.

Partie A. Probabilités conditionnelles

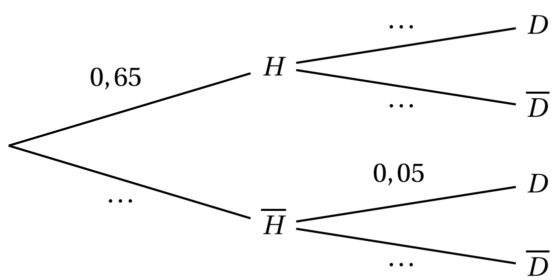
On dispose des données suivantes :

- 65 % des ampoules produites sont des ampoules pour l'habitacle.
  Parmi elles, 15 % sont défectueuses.
- 35 % des ampoules produites sont des ampoules pour les phares.
  Parmi elles, 5 % sont défectueuses.

On choisit une ampoule au hasard et on considère les évènements suivants :

- H : l'ampoule est une ampoule pour l'habitacle.
- D : l'ampoule est défectueuse.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui décrit la situation.



2. Calculer la probabilité $P(H \cap D)$.
3. Démontrer que $P(D) = 0,115$.
4. L'ampoule choisie est défectueuse.
   Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une ampoule pour phares ? Arrondir au millième.

Partie B. Loi binomiale

On rappelle que la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard soit défectueuse est égale à 0,115.
On prélève un échantillon aléatoire de 300 ampoules. On suppose que ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'ampoules défectueuses au sein de cet échantillon.

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X ainsi que ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'exactement 30 ampoules de l'échantillon soient défectueuses ? Arrondir au millième.
3. Quelle est la probabilité qu'au plus 20 ampoules de l'échantillon soient défectueuses ? Arrondir au millième.