BTS Métropole 18 mai 2026
Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé
Durée : 2 heures

Exercice 1 — 8 points

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une image numérique en noir et blanc est composée de pixels, chaque pixel est représenté par un nombre x allant de 0 à 1.
Le 0 représente le blanc et le 1 représente le noir, les valeurs intermédiaires allant du clair au foncé.
On s'intéresse aux fonctions permettant de modifier le contraste d'une image en noir et blanc; une telle fonction doit vérifier les trois propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$ (le blanc reste blanc);
- $f(1) = 1$ (le noir reste noir);
- la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ (un pixel plus clair qu'un autre le reste après application de la fonction).

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $g(x) = x\,\text{e}^{x^2-1}$.
On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $g'(x) = \text{e}^{x^2-1}(1+2x^2)$.
2. **a.** Justifier que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   b. Est-ce que la fonction g vérifie les trois propriétés nécessaires pour être une fonction permettant de modifier le contraste d'une image en noir et blanc? Justifier la réponse.

Une fonction f augmente le contraste d'une image si :

$$\int_{0,5}^{1} f(x)\,\text{d}x - \int_{0}^{0,5} f(x)\,\text{d}x - 0,25 \geqslant 0.$$

On dit sinon que la fonction f diminue le contraste.

3. **a.** Vérifier que la fonction G par $G(x) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{x^2-1}$ définie sur $[0\,;\,1]$ est une primitive de la fonction g sur cet intervalle.

   b. La fonction g diminue-t-elle ou augmente-t-elle le contraste? Justifier.

Partie B

On applique un filtre qui diminue de 6 % le contraste global d'une image à chaque itération.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le contraste global de l'image après n itérations du filtre sur une image dont le contraste initial est de 0,81. Ainsi, $u_0 = 0{,}81$.

1. **a.** Calculer u_1.
   b. Vérifier que $u_2 = 0{,}715716$.
2. **a.** Justifier que la suite (u_n) est géométrique. Déterminer sa raison.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
   c. Déterminer à partir de combien d'itérations le contraste global de l'image sera inférieur à 0,5.

Exercice 2 — 12 points

Les trois parties A, B et C sont indépendantes.
Les résultats seront arrondis si nécessaire au millième.

Partie A

Un pare-feu analyse les connexions réseau pour détecter les attaques.
1 % des connexions sont malveillantes, c'est-à-dire qu'elles correspondent à une attaque réelle.
Dans sa configuration actuelle, le pare-feu détecte correctement une attaque avec une probabilité de 0,99.
Mais il a aussi un taux de faux positifs de 5 pour 1000, c'est-à-dire que la probabilité qu'il signale à tort une connexion comme malveillante alors qu'elle est légitime est de 0,005.
On choisit au hasard une connexion et on définit les événements suivants :

- A : « la connexion choisie correspond à une attaque » ;
- T : « le pare-feu considère que la connexion correspond à une attaque ».

On note $\overline{A}$ l'événement contraire de l'événement A.

1. **a.** Déterminer $P(A)$.
   b. Modéliser cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(T)$.
3. L'administrateur du pare-feu estime qu'il est bien configuré si, lorsqu'une connexion est considérée comme une attaque par le pare-feu, il y a 95 % de chance que cette connexion soit effectivement une attaque.
   a. Calculer $P_T(A)$.
   b. Le pare-feu est-il bien configuré ? Justifier.

Partie B

L'administrateur du pare-feu analyse fréquemment l'historique des connexions. Pour cela, il prélève au hasard à chaque fois un échantillon de 50 connexions dans l'historique. On considère que l'historique est suffisamment grand pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

On suppose dans cette partie que la probabilité qu'une connexion soit malveillante est de 0,06.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 connexions, associe le nombre de connexions malveillantes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'exactement deux connexions soient malveillantes.
   b. Calculer la probabilité qu'au moins une connexion soit malveillante.
3. Déterminer le nombre moyen de connexions malveillantes par échantillon de 50 connexions.

Partie C

Les attaquants sont capables de s'adapter à la configuration d'un pare-feu. La durée d'efficacité, exprimée en mois, d'une configuration pour un pare-feu, est modélisée par une variable aléatoire Y suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
La probabilité qu'une configuration ait une durée d'efficacité totale supérieure à 6 mois est égale à 0,4.

1. Déterminer la valeur du paramètre λ.
2. Quelle est la valeur moyenne, calculée en mois, de la durée d'efficacité totale d'une configuration ?