Brevet de technicien supérieur Opticien–lunetier

14 mai 2024

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Exercice 1 — 10 points

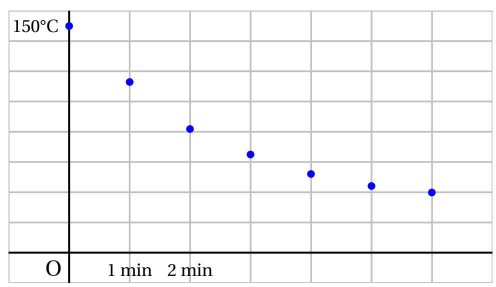
Pour fabriquer des montures, on chauffe un matériau à 150 °C puis on le sort du four et on le laisse refroidir à température ambiante (28 °C).

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Étude d'une série statistique

Pour étudier le refroidissement du matériau, on a réalisé des relevés de température et réalisé un croquis.

Temps t (minutes)	0	1	2	3	4	5	6
Température y (°C)	150	113	82	65	52	44	40



1. Expliquer pourquoi un ajustement affine de y en t n'est pas pertinent.
2. On pose $z = \ln(y - 28)$.

   Recopier et compléter le tableau. Les valeurs de z seront arrondies au centième.

Temps t (minutes)	0	1	2	3	4	5	6
Température y (°C)	150	113	82	65	52	44	40
$z = \ln(y - 28)$	4,80	4,44					

3. On note r le coefficient de corrélation de la série $(t\,;\,z)$.

   On sait que $r \approx -0{,}999$.

   Sur la base de cette information, répondre aux deux questions suivantes en justifiant.

   a. La corrélation de la série $(t\,;\,z)$ est-elle bonne ?

   b. Le nuage de points $(t\,;\,z)$ a-t-il une allure croissante ?

4. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite de régression linéaire de z en t, selon la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$.

   Les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-1}.
5. En déduire une expression de y en fonction de t sous la forme

$$y = C\mathrm{e}^{-0,4t} + 28,$$

   où C est une constante que l'on arrondira à l'unité.

Partie B - Équation différentielle.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \,:\, 5y' + 2y = 56,$$

où y est une fonction inconnue de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, et où y' est sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) \,:\, 5y' + 2y = 0.$$

   On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$ay' + by = 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$

2. Soit A un nombre réel. On considère la fonction constante g, définie par $g(t) = A$.

   Déterminer A pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E), qui vérifie la condition initiale $f(0) = 150$.

Partie C - Étude de fonction

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = 122\mathrm{e}^{-0,4t} + 28.$$

On admet que la fonction f modélise l'évolution de la température du matériau au fil du temps : ainsi, $f(t)$ représente la température, en degrés Celsius, t minutes après la sortie du four.

1. Donner la limite de f en $+\infty$. Ce résultat est-il cohérent avec le contexte de l'exercice ?
2. On cherche à partir de quel instant la température du matériau devient inférieure à 50 °C.

    a. Montrer que cela revient à résoudre l'inéquation : $\text{e}^{-0,4t} \leqslant \dfrac{11}{61}$.

    b. Résoudre cette inéquation, puis déterminer à partir de quel instant, exprimé en minutes et secondes, la température devient inférieure à 50 °C.

3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$F(t) = -305\text{e}^{-0,4t} + 28t.$$

    Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4. Déterminer la température moyenne du matériau durant les 6 premières minutes qui suivent la sortie du four. Arrondir au dixième.

    On fournit pour cela la formule suivante :

Valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\text{d}t$

Exercice 2 — 10 points

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Le tableau ci-dessous décrit le stock de paires de lunettes d'un opticien.

	Verres Polarisés **L**	Verres Photochromiques H	Autre type de verre **A**	Total
Modèle CLASSIQUE **C**	17,5 %	10,5 %	42 %	70 %
Modèle SPORT **S**	16,5 %	10,5 %	3 %	30 %
Total	34 %	21 %	45 %	100 %

Le tableau ci-dessus permet ainsi de voir notamment que :

70 % des paires de lunettes sont des modèles CLASSIQUE.

3 % des paires de lunettes sont des modèles SPORT équipées d'un autre type de verre.

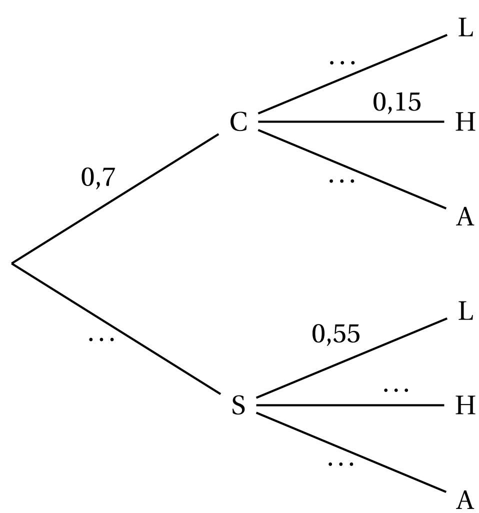
21 % des paires de lunettes sont équipées de verres photochromiques.

On prélève au hasard une paire de lunettes. On considère les évènements suivants :

C : « la paire de lunettes est un modèle CLASSIQUE »,
S : « la paire de lunettes est un modèle SPORT »,
L : « la paire de lunettes est équipée de verres polarisés »,
H : « la paire de lunettes est équipée de verres photochromiques »,
A : « la paire de lunettes est équipée d'un autre type de verre ».

Les résultats seront arrondis, le cas échéant, au millième.

1. Donner la valeur de la probabilité $P(L \cap S)$.
2. Déterminer la probabilité $P(L \cup S)$.
3. Déterminer valeur de la probabilité de L sachant S, notée $P_S(L)$.
4. Les évènements L et S sont-ils indépendants ? Justifier.
5. Recopier et compléter l'arbre suivant qui représente la situation décrite par le tableau.



Partie B - Loi binomiale

Parmi les clients de l'opticien, la proportion de retraités est égale à 62 %.

Un jour donné, l'opticien accueille 90 clients. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de retraités parmi les 90 clients accueillis ce jour.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.

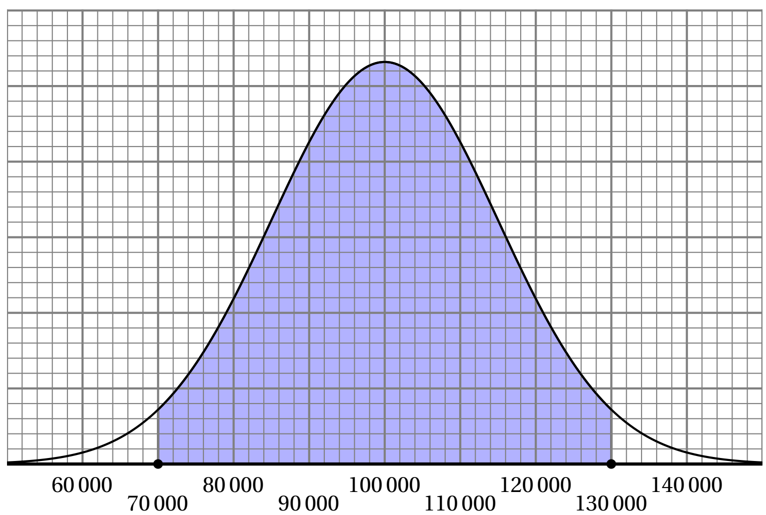
Donner ses paramètres ainsi que son espérance.

2. Calculer la probabilité $P(X = 55)$. Arrondir au millième.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins 50 % des clients accueillis ce jour soient des retraités ? Arrondir au millième.

Partie C - Loi normale

Le chiffre d'affaires d'un opticien en 2023 a été égal à 80 000 euros. Il espère que son chiffre d'affaires en 2024 sera supérieur.

Son chiffre d'affaires, en euros, estimé pour 2024, est donné par une variable aléatoire Z qui suit une loi normale dont la courbe de densité est représentée ci-dessous.



1. On note μ l'espérance de la variable aléatoire Z.

   Déterminer graphiquement la valeur de μ.
2. On note σ l'écart-type de la variable aléatoire Z.

   On sait que la zone grisée correspond à une probabilité égale à 0,95.

   Expliquer pourquoi on a : $\sigma \approx 15\,000$.
3. Quelle est la probabilité que le chiffre d'affaires en 2024 soit supérieur à celui de 2023 ? Arrondir au millième.
4. Si entre 2023 et 2024, son chiffre d'affaires augmente de 30 %, l'opticien embauchera un nouvel employé.

   Quelle est la probabilité que l'opticien embauche un nouvel employé ?

   Arrondir au millième.

Partie D - Test d'hypothèse

Afin de développer le commerce, une commune rurale décide de construire des parkings pour les commerçants dont la proportion de clients venant en voiture est comprise entre

50 % et 60 %. Lorsque la proportion est inférieure, le parking n'est pas nécessaire. Lorsque la proportion est supérieure, le commerçant devra obligatoirement s'installer en périphérie de la commune.

Un opticien affirme à la mairie de cette commune que 55 % de ses clients viennent en voiture.

Afin de contrôler cette affirmation, la mairie met en place un test bilatéral au seuil de 5 % sur un échantillon aléatoire de 130 clients.

On note F la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 130 clients, associe la proportion de ceux qui viennent en voiture. On suppose que F suit une loi normale d'espérance p inconnue et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{130}}$.

L'hypothèse nulle est H_0 : « $p = 0{,}55$ ».

L'hypothèse alternative est H_1 : « $p \neq 0{,}55$ ».

1. Justifier que, sous l'hypothèse nulle, la variable aléatoire F suit une loi normale d'espérance 0,55 et d'écart-type 0,044.
2. Déterminer, sous l'hypothèse nulle, le réel positif h tel que

$$P(0{,}55 - h < F < 0{,}55 + h) = 0{,}95.$$

3. Sur un échantillon de 130 clients, la mairie a noté que 88 étaient venus en voiture.

   Que peut-on conclure ?