

∞ BTS Métropole 16 mai 2024 ∞

Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé
Durée : 2 heures

Exercice 1

10 points

Un magasin vend des téléphones portables et souhaite proposer à ses acheteurs de souscrire un contrat d'assurance.

Partie A : Étude de marché

Avant la date de proposition de son assurance, le magasin a commandé une étude permettant d'observer les habitudes d'un échantillon représentatif d'acheteurs. Elle a obtenu les informations suivantes :

- 78 % des joueurs de l'échantillon ont moins de 30 ans;
- parmi les acheteurs de moins de 30 ans, 4 % souscrivent un contrat d'assurance;
- 14 % des acheteurs qui ont 30 ans ou plus souscrivent un contrat d'assurance.

On choisit un acheteur au hasard dans cet échantillon.

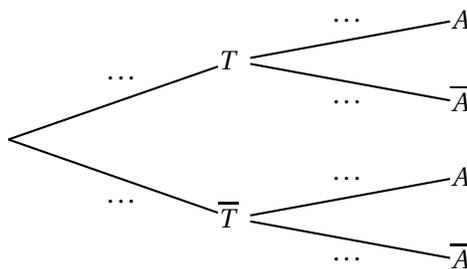
On considère les évènements suivants :

T : « l'acheteur a moins de 30 ans »;

A : « l'acheteur souscrit un contrat d'assurance ».

On rappelle que, quel que soit l'évènement E , on note \bar{E} son évènement contraire.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Calculer la probabilité que l'acheteur ait moins de 30 ans et souscrive un contrat d'assurance.
3. Montrer que la probabilité que l'acheteur souscrive un contrat d'assurance est égale à 0,062.

4. Sachant qu'un acheteur a souscrit un contrat d'assurance, quelle est la probabilité qu'il ait moins de 30 ans?

Arrondir le résultat à 10^{-3} .

Partie B : Étude après commercialisation

Pour la première phase de commercialisation de son contrat d'assurance, le magasin a vendu 100 téléphones.

On considère que cette phase de commercialisation revient à effectuer un prélèvement de 100 acheteurs avec remise parmi un très grand nombre d'acheteurs.

On suppose que l'échantillon de la partie A était représentatif, c'est-à-dire que la probabilité qu'un acheteur de téléphone prélevé au hasard souscrive un contrat d'assurance est égale à 0,062.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 100 acheteurs, associe le nombre d'acheteurs qui ont souscrit un contrat d'assurance.

1.
 - a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,062$.
 - b. Calculer la probabilité qu'exactly 7 acheteurs souscrivent un contrat d'assurance. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
 - c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X .
 - d. Pour chaque téléphone vendu, le magasin reçoit une prime de 7,50 euros si l'acheteur souscrit un contrat d'assurance.
En moyenne, quel est le montant total des primes que percevra le magasin?
2. Pour approfondir son étude, la société décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6,2$.

On note Y la variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

- a. Justifier le choix de $\lambda = 6,2$.
- b. Calculer $P(Y \geq 5)$, puis interpréter ce résultat. Arrondir le résultat à 10^{-3} .
- c. Calculer la probabilité qu'au moins un acheteur souscrive un contrat d'assurance.

Exercice 2

10 points

Une société conçoit et commercialise un jeu vidéo d'aventure. Partie A : Gain de niveau et points d'expérience - étude statistique Ce jeu est constitué de plusieurs niveaux. Un joueur débute au niveau 1 et peut passer au niveau supérieur en gagnant des points d'expérience. . . Pour tout entier naturel n , non nul, on note X_n le nombre de points d'expérience nécessaires (en milliers) pour passer du niveau n au niveau $n + 1$.

Le tableau ci-dessous indique, pour quelques niveaux, le nombre de points d'expérience nécessaires (en milliers) pour passer au niveau suivant :

Niveau n	2	4	6	8	10
Nombre de points d'expérience nécessaires (en milliers) pour passer du niveau n au niveau $n + 1$	220	256	283	304	321

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(n ; X_n)$. Arrondir le résultat au centième.
2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de X_n en n , sous la forme $X_n = an + b$.
3. À l'aide de l'équation de la droite de régression trouvée précédemment, estimer le nombre de points d'expérience nécessaires pour passer du niveau 20 au niveau 21. Arrondir le résultat à 1 près.

Partie B : Gain de niveau et points d'expérience - étude de fonction

La société n'est pas satisfaite de la valeur de r trouvée en partie A, qu'elle estime trop éloignée de 1.

Elle choisit une autre méthode.

Pour cela, elle considère la fonction f définie sur $[1 ; 100]$ par

$$f(x) = 100 \ln(2x + 5).$$

On admet que pour tout entier naturel n , non nul, $f(n)$ modélise le nombre de points d'expérience nécessaires (en milliers) pour passer du niveau n au niveau $n + 1$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

1. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; 100]$, $f'(x) = \frac{200}{2x + 5}$.
2.
 - a. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $[1 ; 100]$.
 - b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[1 ; 100]$. On arrondira la valeur des images à l'unité.
3.
 - a. Résoudre sur $[1 ; 100]$, l'équation $f(x) = 500$.
On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 1 près.
 - b. En déduire le premier niveau à partir duquel au moins 500 points d'expérience sont nécessaires pour passer au niveau suivant.

Partie C : Étude des gains d'Ether

La monnaie du jeu s'appelle l'Ether (symbolisé par E). Un joueur débute avec une somme de 50 000 E .

Les règles sont telles que chaque nouvelle heure supplémentaire jouée augmente la somme détenue par le joueur de 2 %.

Pour tout entier naturel, u_n modélise la somme détenue par le joueur après avoir joué n heures.

Ainsi on a $u_0 = 50\,000$.

1.
 - a. Calculer u_1 .
 - b. Vérifier que $u_2 = 52\,020$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2.
 - a. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 - b. Déterminer la nature de la suite (u_n) .
3.
 - a. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
 - b. En déduire, à l'unité près, la somme détenue après avoir joué 7 heures.