BTS Polynésie 16 mai 2024

Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé
Durée : 2 heures

Exercice 1 **10 points**

Une entreprise fabrique entre 1 000 et 15 000 composants pour téléphones portables par jour. On admet que si l'entreprise fabrique x milliers de composants par jour le bénéfice de l'entreprise en centaines d'euros est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ par :

$$f(x) = -x\ln(x) + 2x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Partie A

1. **a.** Un logiciel de calcul formel donne l'expression suivante pour la dérivée de la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$:

1	$x\ln(x)$
	Dérivée : $\ln(x)+1$

En déduire l'expression de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,15]$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction f (les images seront, si besoin, arrondies au centième).

d. Déterminer la valeur du maximum de f sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ et préciser pour quelle valeur ce maximum est atteint.

2. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans l'intervalle $[1\,;\,15]$, puis en déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée au centième.

b. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

3. **a.** Vérifier que la fonction F définie sur $[1\,;\,15]$, par

$$F(x) = x^2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\ln(x)\right)$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

b. Donner une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$$

à 10^{-2} près.

Partie B

1. Déterminer le bénéfice maximal à l'euro près réalisé par l'entreprise et le nombre de composants pour le réaliser.
2. On considère que la production journalière de l'entreprise est comprise entre 2 000 et 6 000 composants.
   a. Justifier alors que l'entreprise réalise un bénéfice positif.
   b. Pour une telle production, on admet que le bénéfice moyen de l'entreprise, en centaines d'euros, est donné par :

$$\mu = \frac{1}{4}\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Déterminer, à l'euro près, la valeur de ce bénéfice moyen.

Exercice 2 **10 points**

Partie A

Une entreprise possède deux chaînes de fabrication, notées a et b, qui produisent des composants électroniques.
La chaine a produit 55 % des composants. On estime que 5 % des pièces produites par la chaîne a sont défectueuses et 4 % des pièces produites par la chaîne b sont défectueuses.
On choisit au hasard un composant électronique parmi ceux produits par cette entreprise.
On considère les évènements suivants :

- A : « le composant est produit par la chaine a »
- B : « le composant est produit par la chaîne b »
- D : « le composant présente un défaut »;

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

1. **a.** Modéliser cette situation par un arbre pondéré.
   b. Déterminer les probabilités $P(A \cap D)$, $P(B \cap D)$ et en déduire la probabilité qu'un composant soit défectueux.
   c. On a prélevé un composant défectueux, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne a.

2. On constitue un lot de composants provenant des deux chaînes de fabrication en prélevant 100 composants.

On considère que le nombre de composants produits par les deux chaines de fabrication est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

On considère que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est $p = 0{,}045\,5$.

On note X la variable aléatoire, qui a chaque lot de 100 composants, associe le nombre de pièces défectueuses de ce lot.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Déterminer les probabilités $P(X = 0)$ et $P(X \leqslant 10)$.

c. En déduire la probabilité qu'il y ait entre 1 et 10 pièces défectueuses dans le lot.

d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat dans le cadre de cet exercice.

Partie B

Une société commercialise des liseuses utilisant les composants électroniques étudiés dans la partie A. Le tableau ci-dessous, où x_i désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2015, donne le nombre y_i de liseuses de cette marque vendues annuellement depuis 2015.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i de liseuses vendues	1 245	1 320	1 421	1 480	1 530	1 680	1 710

1. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. Arrondir le résultat au centième.

b. Expliquer pourquoi le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$. Les coefficients a et b seront arrondis au dixième.

3. **a.** À l'aide de l'équation de la droite de régression trouvée précédemment, estimer le nombre de liseuses vendues en 2023.

b. À l'aide de l'équation de la droite de régression trouvée précédemment, estimer le rang de l'année à partir duquel le nombre de liseuses vendues deviendrait supérieur à 3 000.