BTS Groupement C session 2003

Exercice 1 **10 points**

Une usine de montage utilise des roulements provenant de deux entreprises de mécanique, l'une située à Reims, l'autre à Nancy. Son stock de roulements provient à 40 % de l'entreprise de Reims dont 4,5 % de la production est inutilisable. Le reste provient de l'entreprise de Nancy qui fournit 2 % de roulements inutilisables.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. On prélève au hasard un roulement dans le stock.
   - **a.** Déterminer la probabilité qu'il soit utilisable, sachant qu'il provient de Reims.
   - **b.** Déterminer la probabilité qu'il soit utilisable, sachant qu'il provient de Nancy.
   - **c.** En déduire que la probabilité qu'il soit utilisable est $0,97$.
2. On prélève dans le stock, successivement et au hasard, dix roulements. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de ceux qui sont utilisables. On assimilera ce prélèvement à un tirage avec remise.
   - **a.** Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser les paramètres.
   - **b.** Déterminer, au centième près par excès, la probabilité que sur ces dix roulements, neuf au moins soient utilisables.
3. On prélève dans le stock 100 roulements, successivement et au hasard. On note Y le nombre de ceux qui sont inutilisables. On assimilera ce prélèvement à un tirage avec remise. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres 100 et $0,03$; on approche cette loi par une loi de Poisson.
   - **a.** Déterminer le paramètre de cette loi de Poisson.
   - **b.** Déterminer la probabilité que moins de deux roulements soient inutilisables. On donnera un résultat arrondi au centième.

Partie B

On étudie dans cette partie le diamètre des roulements.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque roulement, associe son diamètre en millimètres.
On admet que D suit une loi normale de moyenne $23,65$ et d'écart type $0,02$.

1. On choisit au hasard un roulement. Quelle est la probabilité que son diamètre appartienne à l'intervalle $[23,61\ ;\ 23,70]$?
2. Soit h un nombre réel. Déterminer h tel que $P(23,65 - h < D < 23,65 + h) = 0,90$.
   On donnera un résultat arrondi au millième.
3. En déduire un intervalle I tel que les diamètres des roulements de la production aient la probabilité $0,90$ de lui appartenir.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de l'exercice sont indépendantes.

Un mobile est propulsé à très grande vitesse sur un axe, puis il est ralenti. On s'intéresse à la vitesse de ce mobile durant le freinage. Dans tout l'exercice, les distances sont exprimées en mètres, les temps en secondes et donc les vitesses en mètres par secondes.

Partie A

Les résultats seront arrondis au dixième.

On a relevé les vitesses instantanées v_i de ce mobile aux instants t_i pour i variant de 0 à 7.

t_i en s	0	1	2	3	4	5	6	7
v_i en m.s^{-1}	215	140	85	57	36	29	27	22

1. Dessiner le nuage de points de cette série statistique et expliquer pourquoi on n'envisagera pas un ajustement affine de ce nuage.
2. on pose $n_i = \ln(v_i - 15)$ pour i variant de 0 à 7. Dresser le tableau de la série $(t_i\ ;\ n_i)$.
3. Donner une équation de la droite de régression de n en t par la méthode des moindres carrés.
4. En déduire une expression de la vitesse v en fonction du temps t sous la forme

$$v = \alpha \mathrm{e}^{\beta t} + \gamma, \text{ où } \alpha,\ \beta \text{ et } \gamma \text{ sont des réels à déterminer.}$$

Partie B

Une modélisation mathématique permet d'écrire que la vitesse v, qui est une fonction positive du temps t, est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad 2y' + y = 15,$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle t.

1. Résoudre l'équation $2y' + y = 0$.
2. Rechercher une fonction constante solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction v, solution de (E), qui vérifie $v(0) = 215$.

Partie C

On admet que la vitesse du mobile est donnée par la fonction v, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$v(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 15.$$

1. Étudier les variations de v sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Montrer que ce système de freinage ne permet pas, en théorie, au mobile de s'arrêter.
3. Sachant que la distance parcourue par le mobile entre les instants t_1 et t_2 est $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le mobile entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 10$, puis en donner une valeur arrondie au dixième.