# Petite remontée des nombres ascendants

Jean-Christophe Deledicq(*)

Voici un problème, somme toute, déjà bien connu, que je pose souvent aux jeunes lauréats du jeu-concours le Kangourou des mathématiques, venus participer au camp de vacances auquel ils ont été invités.
Il faut noter d'une part que ce problème ne leur a encore jamais été posé, d'autre part que ces jeunes ont entre 11 et 17 ans et qu'ils viennent d'horizons différents : Bulgarie, Pologne, Kazakhstan, Canada, France, …

Rappelons l'énoncé du problème :

> *Un « nombre ascendant » est un nombre dont les chiffres sont, de gauche à droite, écrits en ordre strictement croissant. Combien existe-t-il de nombres ascendants ?*

Je vais donc vous raconter maintenant les développements, les idées et les recherches engendrés par cet exercice.

**Par Comptage**

Voici une première solution proposée par Sacha (15 ans, Canada).
Il y a 10 nombres ascendants à 1 chiffre.
Il y a 8 nombres ascendants de 10 à 19, puis 7 de 20 à 29, … , puis 1 de 81 à 89, soit 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36.
De 100 à 200, il y en a comme de 20 à 99 soit 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28.
De 200 à 300, il y en a comme de 30 à 99 soit 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.
De 300 à 400 : $S_5 = 15$ ; de 400 à 500 : $S_4 = 10$ ; de 500 à 600 : $S_3 = 6$ ; de 600 à 700 : $S_2 = 3$ ; de 700 à 800 : $S_1 = 1$ (c'est 789).
Soit : 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84 nombres ascendants à 3 chiffres.

À ce moment de sa démonstration, je me suis permis d'intervenir pour expliquer aux plus jeunes la formule : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, au sujet de laquelle j'ai donné quelques explications.
Pour les nombres à 4 chiffres, Sacha a procédé de même, indiquant :
Entre 1 200 et 1 300, c'est comme entre 30 et 99 soit $S_6 = 21$
Et de 1 200 à 2 000 : $S_6 + S_5 + S_4 + S_3 + S_2 + S_1 = 56$.
Ainsi de 1 200 à 9 999, on trouve : 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 126 nombres ascendants à 4 chiffres.
Puis il trouve le nombre de nombres ascendants à 5 chiffres : de 12 300 à 99 999 : 126.
Le nombre de nombres ascendants à 6 chiffres : 84.

(*) Kangouroudesmaths@mathkang.org

Le nombre de nombres ascendants à 7 chiffres : 36.
Le nombre de nombres ascendants à 8 chiffres : 9.
Le nombre de nombres ascendants à 9 chiffres : 1.
Enfin, Sacha a additionné tous ces nombres pour trouver : 512.

Après les félicitations pour cette démonstration dont la longueur imposait rigueur et concentration, j'ai fait remarquer qu'arrivé là, le résultat annoncé : 512, pouvait faire penser à quelque chose d'intéressant, pouvant faire germer une nouvelle idée.
Chacun ayant reconnu que 512 est une puissance de 2 ou ayant entendu les autres le dire, j'accordais quelques instants de plus pour laisser rebondir nos « Kangouristes » sur ce $2^9 = 512$.

Remarquons que j'aurais pu aussi mettre en évidence la suite : 1, 9, 36, 84, 126, 84, 36, 9, 1. Peut-être que quelqu'un aurait reconnu la 9^e^ ligne du triangle de Pascal. Comme nous allons le voir plus loin cela aurait fait un beau lien avec la somme de cette ligne qui représente le nombre de parties d'un ensemble à 9 éléments. Je le ferai au prochain camp de vacances, pour le plaisir…

### L'alternative sur les 9 chiffres

Une idée vient alors de Kevin (15 ans, Canada).
Écrivons les entiers de 1 à 9 dans l'ordre :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Si un de ces entiers apparaît dans l'écriture d'un nombre ascendant, notons cela par un trait après chacun de ces entiers. Par exemple 15 sera noté ainsi :

1/ 2 3 4 5/ 6 7 8 9

ou 248 ainsi :

1 2/ 3 4/ 5 6 7 8/ 9

Kevin, oublie de dire, mais le pense sûrement :
« Chaque nombre ascendant a ainsi une seule écriture possible et chaque écriture donne un nombre ascendant unique. »
Kevin poursuit : chaque entier est donc suivi de rien ou d'un trait ; il y a 9 emplacements (un après chaque chiffre) et chacun des 9 emplacements peut prendre 2 valeurs : rien ou un trait ; cela fait donc $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^9 = 512$ nombres ascendants possibles.
Cette démonstration, qui est venue à Kevin en moins d'une minute après que j'ai invité le groupe à réfléchir sur le 512, m'a permis de rebondir de nouveau.

### Le parallèle avec la base 2

J'ai fait remarquer que le rien dont il parlait pouvait avoir un rapport avec le zéro dont l'un des sens est l'absence, comme dans 102 où zéro marque l'absence de dizaine. De même le trait, /, que Kevin nommait « dash » en anglais, pouvait, sans trop d'effort non plus, faire penser au chiffre 1.
On peut donc ainsi désormais, écrire sous les positions des 9 chiffres, soit 0, soit 1, considérant que 1 signifie « on prend ce chiffre pour former un nombre ascendant » et 0 signifie « on ne le prend pas ».

D'où la représentation des nombres ascendants à l'aide de 0 ou de 1.
Exemple sur 4 nombres ascendants : 15 s'écrivant 1 0 0 0 1 0 0 0 0, 248 s'écrivant 0 1 0 1 0 0 0 1 0 et 13 789 s'écrivant 1 0 1 0 0 0 1 1 1.
Je n'eus pas besoin d'aller plus loin pour que quelques-uns remarquent une écriture en base deux de tous les nombres à 9 chiffres. En base 2 chaque nombre à 9 chiffres donne un nombre ascendant et chaque nombre ascendant correspond à un seul nombre à 9 chiffres en base 2. Ainsi, le nombre de nombres à 9 chiffres en base 2 est égal au nombre de nombres ascendants, et se calcule en disant que l'on a 2 choix pour le chiffre 1 (ou bien ou le prend ou bien pas), puis 2 choix pour le chiffres 2, et ainsi de suite jusqu'à 2 choix pour le chiffre 9. Ce qui donne donc $2^9$ nombres ascendants (je ne me souviens plus de qui donna cette solution).
La solution, toujours la même, de $2^9$ s'imposait alors encore plus simplement.

**En considérant les parties d'un ensemble**

C'est alors que Tomasz (18 ans, Pologne) fait le rapprochement entre les puissances de 2 et les parties d'un ensemble. Nous avions présenté cela, ainsi que le triangle de Pascal et les coefficients binomiaux, lors d'un autre exercice un peu plus tôt dans la semaine.
Voici la solution de Tomasz.
Prenons l'ensemble des entiers de 1 à 9 : {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
Pour chacune de ses parties, il n'y a, évidemment, qu'un seul nombre ascendant (celui des chiffres dans l'ordre croissant). Cet ensemble a $2^9$ parties ; il y a donc 512 nombres ascendants en comptant l'ensemble vide associé au nombre zéro.

**Conclusion**

Je souhaitais vous présenter cet exercice avec les différentes solutions proposées par les jeunes pour en montrer à la fois quelques richesses et quelques intérêts et découvertes que sa recherche pouvait apporter.
Mais je voulais aussi faire remarquer les avantages présentés par la réunion de jeunes d'âges différents, en l'occurrence de 11 à 18 ans, d'horizons différents et d'apprentissage, de savoir et de culture différents. Chacun pouvant apprécier la manière dont les uns ou les autres peuvent rebondir sur un même problème.

**Et encore**

Dans la même veine, j'avais proposé cet autre problème :

> *Dans une tribu de 90 guerriers, chaque guerrier décore sa lance avec 9 plumes rouges ou blanches. Les plumes sont fixées sur la lance en ligne de telle sorte que 2 plumes rouges ne peuvent pas être côte à côte. Est-ce que tous les guerriers peuvent avoir des lances différemment colorées ?* (tiré des olympiades Slovènes 1998)

Mateusz (polonais, 16 ans) a vu une résolution, par comptages successifs : avec 0 plume rouge, une, deux, trois, quatre ou cinq plumes rouges il obtient les résultats :
$1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$
Mateusz conclut : puisqu'il y a 89 décorations différentes et 90 guerriers, il y en a au moins 2 qui ont la même décoration.

Puis il y a l'approche d'Urvan (13 ans France) par nombre de plumes : avec 1 plume, on a 2 choix ; avec 2 plumes, 3 choix (RB, BR, BB) ; avec 3 plumes, 5 choix (BBB, BBR, BRB, RBB et RBR). Puis, on a successivement 8 choix, 13 choix, 21 choix, 34 choix, 55 choix et, pour finir, 89 choix avec 9 plumes.
Comme pour le problème précédent, avec de la patience et surtout de la méthode, il est là aussi possible d'écrire, de lister toutes les configurations.

Ayant ainsi reconnu la suite de Fibonacci, une démonstration par récurrence fut donnée par Tomasz. Ainsi le problème fut correctement résolu et généralisé.

Je pourrais vous proposer d'autres exemples où l'on peut montrer ainsi plusieurs étapes de la réflexion, menant jusqu'à une belle démonstration. Chacun voit et comprend ainsi la beauté finale des mathématiques.
J'ai remarqué aussi que les jeunes qui avaient la « belle » idée laissaient, consciemment ou non, je ne sais pas, mais laissaient les autres (souvent mais pas toujours les plus jeunes) passer au tableau en premier.
Moi-même aussi, pour ne pas « tuer » le problème et sa beauté, j'essaie de faire venir les plus jeunes d'abord. Bien sûr, il arrive aussi que les plus jeunes trouvent une très belle solution...
En tout cas, je crois que mêler les âges et les cultures comme nous le faisons dans les camps de vacances Kangourou permet grâce à des problèmes du type des deux exposés ici de faire joliment apparaître la beauté d'une démonstration.