BULLETIN de l'ASSOCIATION des PROFESSEURS de MATHÉMATIQUES de l'Enseignement Public

SOMMAIRE

I. ETUDES.

L. SCHWARTZ : Topologie algébrique : éléments d'homologie 189

II. ESSAIS.

R. NEUMEISTER : Définition axiomatique des déplacements et problème fondamental de la géométrie métrique dans le plan 198

C. GATTEGNO : Structures mathématiques et structures mentales 212

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES.

Z. KRYGOWSKA : Le danger du formalisme et du verbalisme dans l'enseignement de l'algèbre 221

J. WEIL : Quelques points de pédagogie théorique 230

Trois points de vue d'utilisateurs.

A. DE CAYEUX : Mathématiques utiles au naturaliste et au géographe 234

L. LEBOUTET : Etude sur les difficultés des étudiants en Statistique 240

CUSTAUD : Ce que les physiciens demandent aux mathématiciens 243

F. BRACHET : Réflexions sur le nouveau programme de sixième 246

GOUKOWSKY : Familles de problèmes 249

Définitions et notations, par E. EHRHART, BENHAIM et L. FELIX 250

Un projet de programmes scientifiques 252

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE.

Henri POINCARÉ et Paul VALÉRY : Les films de géométrie animée. Pour l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Pour l'enseignement de l'astronomie 260

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS.

R. DONTOT : Rapport sur l'agrégation masculine de mathématiques, session 1957 264

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION.

G. W. : Rapport sur l'activité générale de l'A.P.M. 281

P. LEGRAND : Rapport financier 291

Vœux pour l'assemblée générale 292

Le bulletin contient un encart pour les votes de l'Assemblée générale

37e année — N° 191 Publication trimestrielle Mars 1958

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5e)
Paris, Cc. 5.708-21

Les membres de l'Association (cotisation : 800 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés.*

Cotisation pour les élèves des E.N.S. et les stagiaires des C.P.R. ..... 400 F
Prix de l'abonnement au *Bulletin* ..... 1 000 F
Prix du numéro ..... 200 F

Présidents d'Honneur
Mlle DIONOT, M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. WALUSINSKI, 26, parc de la Bérengère, Saint-Cloud (S.-et-O.). VAL. 29-09.

Vice-Présidents :
Mlle MASSON (Enseignement féminin), 12, Boulevard Desgranges, Sceaux (Seine).
M. BIGUENET (Enseignement Technique), 41, rue Madeleine-Michelis, Neuilly-sur-Seine.
M. CHAZAL (Formation des maîtres), 2, rue Thimonnier, Paris, 9e.
M. DURRANDE (Grandes Ecoles), 4 *bis,* rue Henri-Moreau, Asnières.
M. EDDE (Ecoles Normales), 40, avenue du Général-Leclerc, Paris, 14e.
M. MONJALLON, 23, boulevard Saint-Gemain, Paris, 5e.

Secrétaires :
Mlle FÉLIX (Conférences), 2, rue Octave-Feuillet, Paris, 16e.
M. HUISMAN (Administration de l'A.P.M.), 11, rue Jacques-Cœur, Paris, 4e.
M. SIROS (Programmes), 13, avenue Jean-Racine, Sceaux.
M. CROZES (Recherches pédagogiques), 10, rue du Buisson-St-Louis, Paris, 10e.
M. MOUGENOT (Relations avec les régionales), Lycée Poincaré, Nancy.
M. GIRARD (Classes préparatoires), 37, rue Davioud, Paris, 16e.

Trésorier : M. LEGRAND, 3 *bis,* avenue R.-Poincaré, Margny-lès-Compiègne (Oise).

Comité de rédaction du « Bulletin » : Mlle FÉLIX, Mlle MARCHAND ; MM. CHAZAL, ITARD, SIROS. — Secrétariat : HUISMAN et WALUSINSKI.

Comité :

Membres élus

Sortants en 1958 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*Charlemagne*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. GIRARD (*J.-B. Say*) ; M. LEGRAND (Compiègne) ; M. WALUSINSKI (*St-Cloud*).

Sortants en 1959 : Mlle FÉLIX (*La Fontaine*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; M. FOUCHÉ (*Janson-de-Sailly*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. MINOIS (*St-Louis*).

Sortants en 1960 : MM. DURRANDE (*St-Louis*) ; HUISMAN (*Montaigne*) ; MONJALLON (*St-Louis*) ; RUFF (*St-Louis*) ; SIROS (*Louis-le-Grand*) ; GUILLORÉ (*C.C.* Paris).

Sortants en 1961 : M. BAY (*Condorcet*) ; Mlle BIARD (*E.N.S.* Fontenay) ; M. CASSE (Savigny-sur-Orge) ; M. CROZES (*Henri-IV*) ; M. LE MÉNAGER (Angers) ; Mlle MARCHAND (Lycée de Sèvres) ; M. MOUGENOT (*Poincaré,* Nancy) ; Mlle VERVAECKE (*Fénelon,* Lille).

Membres de droit

M. BAY (*Condorcet*) ; M. CANONGE (Montpellier) ; M. GIRAULT (*J.-B.-Say*) ; M. MARVILLET (Strasbourg, *Kléber*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; Mme NICOUD (Lyon, *Marie-Vidalenc*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; Mme SCHUCK (*Victor-Duruy*).

Rapporteurs

Enseignement technique : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. ROSTOLLAND ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, Mlle PROTIN (Sciences Expérimentales) ; *Mathématiques Supérieures et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. DURRANDE ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* M. BERTRAND ; *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — *Concours général :* M. MONJALLON ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* M. MONJALLON ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (Marseille, *Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (Besançon) ; *Dijon :* M. SAUSER ; Lille : M. FAVRELLE (Lille, *Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (Lyon, *Ampère*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (Nancy, *Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAULT (Rennes) ; *Strasbourg :* M. EHRHART (Strasbourg, *Kléber*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (Tunis, *Carnot*).

37e Année — N° 191 Mars 1958

BULLETIN de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

I. ÉTUDE

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE : ÉLÉMENTS D'HOMOLOGIE *

par M. Laurent SCHWARTZ
Professeur à la Sorbonne

Nous allons d'abord décrire quelques faits qui concernent ce que l'on appelait au temps de POINCARÉ l'Analysis Situs. Nous suggérerons ainsi des notions intuitives qui sont à la base d'une science qui constitue la Topologie algébrique ; nous y distinguerons alors les questions qui concernent l'Homologie.

I. Quelques problèmes de géométrie intuitive.

1) Sur une sphère, surface de l'espace à trois dimensions, nous avons la notion d'une *courbe fermée*. Par une *transformation continue* qui lui conserve ce caractère de courbe fermée, nous pouvons la *réduire à un point*. (Nous exprimerons plus tard ceci en disant qu'elle est *homotope à zéro*).

Mais, sur la surface du tore, nous distinguons immédiatement des courbes C du type précédent, c'est-à-dire réductibles à un point, en particulier toutes les courbes fermées qui restent dans une région assez petite du tore, des courbes C′ telles qu'un méridien, qui tournent autour du cercle moyen, des courbes C″ telles qu'un parallèle, qui tournent autour de l'axe du tore. Une courbe C′ et une courbe C″ ne peuvent pas se réduire à un point, ni se réduire l'une à l'autre par déformation continue qui les laisse fermées.

Les problèmes soulevés par ces remarques sont l'objet de l'*Homotopie*.

(*) Conférence prononcée le 6 juin 1957, à l'Institut Henri-Poincaré, dixième conférence du cycle sur la topologie, organisé par la Société Mathématique de France en accord avec l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs.

2) Le problème de la réduction à un point est lié à des *problèmes d'intersection :* par exemple, une courbe C′ et une courbe C″ sur le tore se coupent nécessairement en au moins un point. (L'on peut aussi songer aux deux familles de génératrices rectilignes sur une quadrique).

3) *Problème des régions.*

Considérons l'espace à trois dimensions R^3 « troué », c'est-à-dire dont on a ôté un point, l'origine par exemple (c'est donc $R^3 - O$). Toute courbe fermée y est réductible à un point, mais il n'en est pas de même de toute surface fermée : si O est dans la *région intérieure* à une sphère, on ne peut, dans R^3, réduire cette espère à un point sans qu'elle passe par O ; il se pose donc un problème d'*homotopie des surfaces.* Nous retrouvons un problème d'intersection d'une surface telle que cette sphère et d'une courbe analogue à une demi-droite Ox.

On ne peut évidemment étudier mathématiquement ces questions sans donner des définitions précises. Par exemple, l'on sait qu'on appelle *courbe compacte* l'image par application continue du segment [0, 1], et cette courbe est *fermée* si 0 et 1 ont la même image. On connaît, pour le plan, l'énoncé du *théorème de Jordan :* Toute courbe fermée sans point double partage le plan en deux régions. (Deux points d'une même région peuvent, par définition, être joints par une courbe continue sans points communs avec la courbe donnée et cette jonction est impossible pour deux points de régions différentes). Il s'agit donc d'un problème d'intersection. On ne pensera plus que ce résultat est évident et sans intérêt si l'on songe qu'il ne subsiste pas sur un tore : les courbes nommées plus haut C′ ou C″ ne divisent pas la surface en deux régions tout en étant fermées et sans point double !

4) *Problème du champ.*

Il est évidemment possible de définir sur un cercle un champ de vecteurs qui soient tangents au cercle et varient continuement avec le point du cercle sans être jamais nuls. Mais est-ce possible sur une sphère de R^3 ? La réponse est « non ». Mais c'est possible sur une sphère à 3 dimensions de R^4. L'on démontre qu'un tel champ existe sur une sphère S^n de R^{n+1} si et seulement si n est impair. Or, ce problème est primordial pour l'étude des équations différentielles sur les surfaces et l'existence, la classification des singularités, cols, nœuds, etc... (travaux de LEFSCHETZ).

5) Une question de même nature est celle de l'*existence de points fixes dans les transformations.* Par exemple, l'on démontre que toute application continue d'une boule dans elle-même a au moins un point invariant.

6) Lorsque l'on traite du calcul des résidus dans le plan complexe, on étudie une intégrale curviligne et l'on compte *combien de fois la courbe « fait le tour »* de l'origine ou d'un point singulier. C'est un nombre positif, nul ou négatif, qui est lié au nombre « algébrique » des points d'intersection de la courbe avec une courbe joignant le point considéré au point à l'infini du plan complexe. Ce « nombre de tours », évident intuitivement pour les cas simples, devra être défini.

II. Bord d'une surface.

Nous allons étudier plus en détail un problème lié aux précédents et qui est particulièrement typique. Nous nous bornerons à des espaces compacts.

Sur un espace topologique assez simple, donnons-nous une courbe fermée (avec ou sans points doubles). Cette courbe peut-elle être *le bord d'une surface* ?

Voyons d'abord intuitivement ce que cette expression désigne.

Supposons (fig. 1) une courbe limitant une surface orientée en chaque point. La courbe devra être orientée en accord avec le sens choisi. Inversement, soit une courbe fermée parcourue dans un sens déterminé. Est-ce le « bord » d'une surface ? Sur une sphère, oui, c'est le bord de deux surfaces qu'il faut munir d'orientations différentes. Mais sur le tore ? C'est non pour une courbe C' analogue à un méridien, car, en orientant la surface, on aurait un double sens sur la courbe et l'on sent qu'il faudrait alors compter cette courbe, parcourue deux fois dans des sens contraires, pour zéro. Il en est de même pour les courbes C'' telles que les parallèles. Donc, sur le tore, certaines courbes fermées ne sont pas des bords de surface. De même, dans $R^2 - O$ si, comme nous l'avons dit, nous nous bornons à des surfaces compactes, ce qui interdit d'aller à l'infini. Dans $R^3 - O$, une courbe est un bord, mais une sphère qui entoure O n'en est pas un.



Fig. 1

Les exemples que nous venons de prendre, les mêmes pour les deux problèmes de « réduction à un point » et de « bord de surface », montrent bien qu'il y a une liaison entre ces notions. Le premier, réduction à un point, est un *problème d'homotopie ;* le second, étude des bords de surfaces, est un *problème d'homologie*. Ces problèmes ne sont pas équivalents ; le point de vue de l'homotopie est plus fin, au sens suivant : Toute courbe fermée réductible à un point par déformation continue est bord d'une surface, toute surface réductible à un point est bord d'un volume, etc..., mais les réciproques sont inexactes : il existe des bords de surfaces (volumes, etc...) qui ne sont pas réductibles à un point par déformation continue. Montrons ceci sur des exemples :

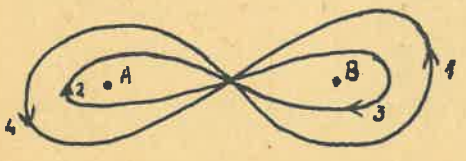


Fig. 2

1er exemple : Du plan R^2, retirons deux points A et B et considérons une courbe 1 2 3 4 telle que l'indique la figure 2. Cette courbe est évidemment un bord de surface et, en homologie, on peut la réduire à zéro en superposant des arcs orientés en sens contraire, mais, en homotopie, on ne peut pas la réduire à un point.

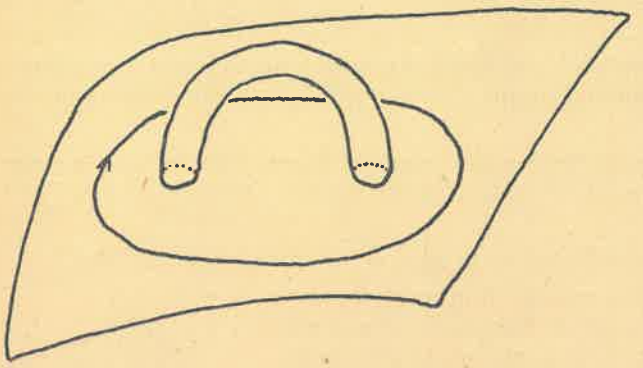


FIG. 3

2° exemple : La figure 3 montre une surface percée de deux trous où sont soudées les extrémités d'un tube. La courbe C qui entoure les trous est bord d'une surface, mais elle ne peut évidemment pas être réduite à zéro, même si le tube est réduit à une simple ligne réunissant deux points.

Ainsi, la théorie de l'homologie est plus simple que la théorie de l'homotopie. La seconde fut tout d'abord abordée par POINCARÉ, mais l'on s'est rapidement dirigé vers l'homologie.

En particulier, *pour le théorème des résidus* signalé plus haut, *le véritable point de vue utile est celui de l'homologie.* Rappelons l'énoncé, d'abord sous une forme trop vague : Si $f(z)$ est une fonction holomorphe uniforme dans le plan, $\int_c f(z)dz = 0$, C étant une courbe fermée quelconque. Mais si la fonction a des pôles, CAUCHY définit, pour chaque pôle, un coefficient nommé résidu de la fonction relatif au pôle, et le théorème fondamental de Cauchy s'exprime par l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz = \sum R_i,$$

le deuxième membre étant la somme des *résidus relatifs aux pôles autour desquels « tourne »* C.

Sur la fig. 2, l'on voit bien, si les pôles sont A et B, que l'intégrale sera nulle, parce que la surface dont la courbe est le bord ne contient pas de pôles ; or, la courbe n'est pas réductible à un point (sans traversée de pôle). Sur la fig. 4, la courbe ayant le sens de parcours marqué, l'on sent bien qu'il faut affecter un point tel que A du coefficient 1, mais un point tel que B du coefficient 2. De même, sur les fig. 5 et 5bis, il faut utiliser $+1$ et $+1$ ou $+1$ et -1.

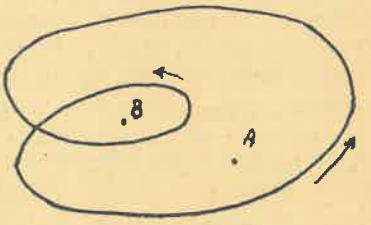


FIG. 4



FIG. 5



FIG. 5 *bis*

Il faut donc considérer la courbe comme bord d'une surface et tenir compte de l'orientation de la courbe et de l'ordre de multiplicité de la surface pour affecter la surface de coefficients au voisinage des pôles.

Une fraction rationnelle d'une variable complexe peut être considérée comme fonction méromorphe sur une sphère de Riemann ; or, une courbe C fermée simple sur la sphère est bord de deux surfaces S_1 et S_2 dont la réunion forme la sphère entière et auxquelles nous devons attribuer les coefficients $+1$ et -1 ; la même intégrale vaut donc la somme des résidus des pôles situés dans S_1 et l'opposé de la somme des résidus des pôles situés dans S_2. On en déduit donc que la somme totale des résidus est nulle. Mais il est clair que la courbe considérée n'intervient pas en réalité ; il suffisait de considérer la surface de la sphère entière, de bord zéro, pour obtenir la conclusion.

III. Définitions et études précises.

Nous venons de montrer comment des problèmes s'introduisent et nous en avons fait sentir l'importance. Il s'agit de leur donner une forme précise. Toute théorie mathématique exprime une idée intuitive, mais on doit souvent la modifier profondément. L'intuition gêne alors la démonstration et risque de conduire à des pétitions de principes. Nous allons nous borner à des espaces topologiques compacts, tels que la sphère S^2 ou le tore T^2. Les surfaces en question seront supposées *triangulables*, c'est-à-dire *pavables par des simplexes :*

Complexe. — Nous savons (voir conférence de M. CARTAN) définir dans R^{n+1} un simplexe de dimension n (pour $n = 0$, c'est un point ; pour $n = 1$, c'est un segment ; pour $n = 2$, c'est la surface d'un triangle ; pour $n = 3$, c'est le volume d'un tétraèdre, etc...), ainsi que ses faces, simplexes de dimension inférieure à n. Sur la surface S^2 ou T^2, ou un espace topologique compact quelconque, nous dirons que nous avons un pavage par simplexes si les conditions suivantes sont réalisées :

1) Les simplexes sur la surface sont définis par homéomorphisme à partir des simplexes de R^n, chaque simplexe σ choisi sur la surface correspondant par un homéomorphisme déterminé à un simplexe σ^1 de R^n (de sorte que les faces de dimension $\leqslant n-1$ de σ seront bien définies) ; σ sera un *simplexe topologique.*

2) La surface est recouverte par un nombre fini de simplexes (hypothèse de compacité).

3) L'intersection de deux simplexes est vide ou bien est une face commune.

Si un espace admet un tel pavage, on l'appellera un complexe.

D'une façon générale, d'après l'hypothèse 2, on définit la dimension topologique du *complexe* obtenu par cette triangulation comme la plus grande dimension, n, des simplexes. Mais il faut noter qu'il peut ne pas y avoir partout la même dimension topologique (par exemple, si l'on considère une sphère à laquelle on ajoute un fil).

Supposer les surfaces triangulables simplifie beaucoup le problème ; ainsi, une courbe sera une union de simplexes à une dimension. Mais

toute variété topologique est-elle triangulable ? Ce problème général n'est pas résolu. Pourtant, l'hypothèse simplificatrice est justifiée, au moins au départ. On montre d'autre part que, si un espace a plusieurs triangulations distinctes, les groupes d'homologie que nous définirons plus loin en sont indépendants.

Chaînes d'un complexe. — Définissons d'abord un *chaînon* de dimension p, ou p-chaînon.

Un p-chaînon est un système de $p+1$ points $a_0 a_1 \dots a_p$ donnés dans un ordre déterminé, distincts ou non, et tous sommets d'un même simplexe du complexe.

Un 0-chaînon est donc un sommet a_0, quelconque, de la triangulation.

Un 1-chaînon est un système de deux sommets $a_0 a_1$ d'un simplexe de dimension 1. Il faut noter que $a_1 a_0$ est un autre 1-chaînon qui est considéré comme tout à fait distinct de $a_0 a_1$. Nous considérons $a_0 a_0$ comme aussi un 1-chaînon, acceptant ainsi que les sommets soient confondus.

Les p-chaînons, p étant choisi, sont en nombre fini N_p (hypothèse 2) et peuvent être notés :

$$\gamma_p^1, \gamma_p^2, \dots, \gamma_p^{Np}$$

Par définition, une p-chaîne sera une combinaison linéaire formelle, à coefficients entiers, de p-chaînons :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{i=Np} \xi_i \gamma_p^i, \quad \xi_i \in Z$$

Nous établirons entre chaînes la loi d'addition :

$$\left(\sum \xi_i \gamma_p^i\right) + \left(\sum \eta_i \gamma_p^i\right) = \sum (\xi_i + \eta_i) \gamma_p^i$$

Cette addition est associative et commutative ; la chaîne nulle ($\xi_i = 0$ pour tout i) est un élément neutre de cette addition.

L'ensemble des p-chaînes est donc un groupe abélien que nous noterons Γ_p.

Bord d'une p-chaîne. — C'est une $(p-1)$-chaîne que nous allons définir. Une p-chaîne, par définition, s'écrit :

$$\sum_{i \in I} \xi_i \gamma_p^i,$$

I étant l'ensemble 1, 2, ..., N_p.

Tout d'abord nous posons :

$$\text{bord de } \left(\sum \xi_i \gamma_p^i\right) = \sum \xi_i \, (\text{bord de } \gamma_p^i)$$

Il ne reste donc qu'à définir le bord d'un chaînon.

Le chaînon a_0 est de dimension 0. Son bord est zéro.

Le chaînon ab est de dimension 1. Son bord est une chaîne de dimension 0. Nous le définissons : bord $(ab) = +b - a$, noté $\mathcal{B}(ab)$.

Le chaînon *abc* de dimension 2 aura comme bord :

$$\mathcal{B}(abc) = bc - ac + ab$$

D'une façon générale, le *p*-chaînon $a_0a_1a_2 \dots a_p$ aura comme bord la $(p-1)$-chaîne :

$$a_1a_2 \dots a_p - a_0a_2 \dots a_p + \dots + (-1)^k a_0a_1 \dots a_{k-1}\, a_{k+1} \dots a_p + \dots + (-1)^p a_0a_1a_2 \dots a_{p-1}$$

Un calcul formel très simple permet ainsi de déterminer le bord d'une *p*-chaîne.

Cycle de dimension p (ce qui équivaut topologiquement à une variété fermée de dimension *p*). — *Un p-cycle est, par définition, une p-chaîne dont le bord est zéro.*

Comme l'opération qui transforme une *p*-chaîne en son bord respecte l'addition (d'après sa définition), l'ensemble des *p*-cycles est un groupe abélien Z_p inclus dans le groupe Γ_p des *p*-chaînes.

Problème : Parmi les *p*-cycles, quels sont ceux qui sont bord de $(p-1)$-chaînes ?

1) *Un bord est un cycle,* autrement dit le bord d'un bord est toujours zéro. Il suffit de le prouver pour un chaînon : $\mathcal{B}\mathcal{B}\,\gamma_p^i = 0$.

Par exemple : $\mathcal{B}(abc) = bc - ac + ab$ et

$$\mathcal{B}\mathcal{B}(abc) = c - b - c + a + b - a = 0.$$

Ceci se généralise sans peine.

Si donc l'on nomme B_p l'ensemble des *p*-chaînes qui sont des bords, l'on a l'inclusion : $\Gamma_p \supset Z_p \supset B_p$

2) Ainsi, le groupe des bords est un sous-groupe du groupe des cycles. Mais ces groupes sont-ils identiques ? L'on a vu intuitivement que la réponse est oui pour la sphère S^2 et non pour le tore T^2. L'on précise la comparaison en étudiant le *groupe-quotient* $Z_p/B_p = H_p$. Ce groupe-quotient se nomme le *groupe d'homologie* de la variété étudiée, pour la dimension *p* (1). Il caractérise la structure étudiée. L'on dit que les *p*-chaînes qui sont des bords, donc les éléments de B_p, sont homologues à zéro, ce que l'on note ~ 0. Deux cycles Γ, Γ' sont *homologues* s'ils sont dans la même *classe d'homologie,* c'est-à-dire si leur différence est homologue à zéro (autrement dit, si cette différence est un bord) ; on écrit $\Gamma \sim \Gamma'$.

Le calcul du groupe d'homologie se fait par les méthodes de la topologie algébrique. Indiquons seulement quelques remarques :

a) Un *chaînon dégénéré aa* est un cycle, car son bord est $a - a = 0$. Est-ce un bord ? Oui, c'est le bord de *aaa*. Donc, il est homologue à zéro, ce qui permet de l'éliminer des chaînes : $aa \sim 0$.

---

(1) On rappelle que si Z est un groupe abélien noté additivement et si B en est un sous-groupe, $H = Z/B$ est l'ensemble des classes d'équivalence définies par la relation d'équivalence $\begin{cases} x \in Z \\ y \in Z \end{cases}$, $x \equiv y \iff x - y \in B$.

b) La chaîne $ab + ba$ est homologue à zéro : $ab + ba \sim 0$. En effet, le bord de *bab* est $\mathcal{B}(bab) = ab - bb + ba \sim ab + ba$. Donc, au point de vue homologique, on peut remplacer *ab* par $-ba$: $ab \sim -ba$.

c) Plus généralement, si dans un chaînon l'on permute les sommets, l'on obtient un chaînon homologue ou non suivant qu'il s'agit d'une permutation paire ou impaire.

Exemples de calcul d'un groupe d'homologie :

1) *Sphère* S^2 supposée triangulée. Les 0-cycles sont les 0-chaînes $\sum \xi_i a_i$, les a_i étant les sommets de la triangulation.

Les 0-bords sont les 0-cycles $\sum \xi_i a_i$ tels que $\sum \xi_i = 0$. Cette condition est en effet évidemment nécessaire puisqu'elle est vraie pour le bord d'un chaînon.

Elle est suffisante car, sur la sphère, on peut joindre un sommet choisi a_0 à tout sommet a_i, donc toutes les chaînes $(a_i - a_0)$ sont ~ 0. Or, si $\sum \xi_i = 0$, $\sum \xi_i a_i = \sum \xi_i (a_i - a_0) \sim 0$.

Alors, deux 0-cycles sont équivalents ou homologues s'ils correspondent à la même valeur de l'entier $\sum \xi_i$. C'est dire que le groupe d'homologie $H_0 = Z_0/B_0$ est le groupe des entiers positifs, négatifs ou nuls.

L'on voit que cette conclusion subsiste pourvu que deux points quelconques puissent être joints par une ligne polygonale formée de simplexes à une dimension : c'est dire que le complexe est un espace topologique *connexe*. Par exemple, ceci ne conviendrait plus pour l'ensemble de deux sphères disjointes. H_0 serait alors le groupe des couples d'entiers. On voit que H_0 donne le *nombre de composantes connexes*.

Etudions maintenant $H_1 = Z_1/B_1$. L'on démontre que, sur la sphère, tous les cycles à une dimension sont des bords ; B_1 est donc identique à Z_1, de sorte que H_1 est le groupe réduit à l'élément neutre 0. (Pour faire la démonstration, l'on utilise une triangulation, par exemple en 8 triangles dont les côtés sont des quarts de grands cercles).

Nous laisserons de côté le groupe d'homologie pour la dimension 2.

2) *Plan percé d'un trou en un point* 0, donc $R^2 - 0$. Cet espace n'est pas compact, mais l'on convient de n'utiliser que des chaînes d'un nombre fini de chaînons pour rester dans la méthode de l'homologie finie ou à support compact. L'on démontre qu'il est possible de définir un cycle fondamental γ_1 dont la classe est représentée par 1, et que tout cycle γ est homologue à *n* fois le cycle fondamental (de sorte que $\gamma - n\gamma_1 \sim 0$ est un bord), *n* entier de signe quelconque. La classe d'homologie qui correspond à l'entier *n* est, par définition, la classe des cycles qui « tournent algébriquement *n* fois autour du point 0 ». Le groupe d'homologie pour la dimension 1 est ainsi celui des entiers.

3) *Tore* T^2. Les méthodes de topologie algébrique permettent de démontrer que le groupe d'homologie est celui des couples d'entiers (m, n) avec la loi d'addition $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$.

Si nous représentons, par exemple, par (1, 0) les courbes C′ homologues aux méridiens et par (0, 1) les courbes C″ homologues aux parallèles du tore, tout cycle est homologue à $mC' + nC''$, m et n étant déterminés d'une façon unique. Nous dirons alors que ce cycle fait algébriquement m fois le tour du cercle moyen, et n fois le tour de l'axe de révolution. Par exemple, pour un cercle de Villarceau, qui tourne une fois autour de l'axe et une fois autour du cercle moyen, la classe d'homologie est $(\pm 1, \pm 1)$ (1).

Conférence rédigée par Mlle L. FÉLIX,
(La Fontaine, Paris).

---

(1) C′ et C″ ont un sens de parcours déterminé, m et n sont des entiers de signe quelconque. Il y a 2 familles de cercles de Villarceau, 2 sens de parcours pour chacune, ce qui donne 4 classes d'homologie : (1, 1), (1, — 1), (— 1, 1), (— 1, — 1).

Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites, les structures mathématiques ; et il se trouve — sans qu'on sache bien pourquoi — que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles et de remplir pleinement leur rôle élaborateur.

C'est seulement avec ce sens du mot « forme » qu'on peut dire que la méthode axiomatique est un « formalisme » ; l'unité qu'elle confère à la mathématique, ce n'est pas l'armature de la logique formelle, unité de squelette sans vie ; c'est la sève nourricière d'un organisme en plein développement, le souple et fécond instrument de recherches auquel ont consciemment travaillé, depuis Gauss, tous les grands penseurs des mathématiques, tous ceux qui, suivant la formule de Lejeune-Dirichlet, ont toujours tendu à « substituer les idées au calcul ».

Nicolas BOURBAKI
(*L'architecture des mathématiques*,
dans « Les grands courants
de la pensée mathématique »).

II. ESSAIS

DÉFINITION AXIOMATIQUE DES DÉPLACEMENTS ET LE PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DANS LE PLAN

par ROBERT NEUMEISTER (*Lycée Fustel-de-Coulanges*, Strasbourg)

1. Introduction

Cette étude se base sur la connaissance de huit axiomes (1) :

(I) les quatre axiomes de la demi-droite ;
(II) les trois axiomes des espaces linéaires ;
(III) l'axiome de Dedekind.

En plus, nous nous servons de notre définition de l'orientation des espaces linéaires.

Pour saisir le phénomène global des déplacements, nous introduisons le groupe des déplacements (positifs et négatifs) dans le plan. Ce groupe est défini par nos deux premiers axiomes des déplacements (IV, 1 et 2). Un troisième axiome (IV, 3) donne l'autonomie aux déplacements d'une droite sur une autre droite, ce qui permettra de définir les déplacements dans les espaces linéaires à plus de deux dimensions, sans avoir recours à d'autres axiomes.

Notre façon de voir se rapproche partiellement du point de vue exposé par R. BRISAC (2), qui introduit le groupe des déplacements positifs dans l'espace à trois dimensions. Mais BRISAC étudie l'orientation en se servant des déplacements, tandis que nous avons déjà résolu le problème de l'orientation indépendamment de la notion de déplacement.

Au début, nous définissons les éléments de position, comparables à nos éléments d'orientation. Ensuite, nous rappelons des généralités sur les groupes de transformations ponctuelles. Les transformations linéaires biunivoques font intervenir la notion de demi-droite qui reste fondamentale dans tout notre système d'axiomes. Les déplacements s'introduisent comme cas particuliers de ces transformations linéaires.

Après avoir donné une définition axiomatique du groupe des déplacements positifs et négatifs dans le plan, nous étudions des cas particuliers de déplacements où le rôle important des symétries se met en évidence. L'existence du milieu d'un segment de droite et de la bissectrice d'un angle est démontrée à l'aide de l'axiome de Dedekind. Finalement, nous arrivons au problème fondamental de la géométrie métrique : l'étude du déplacement le plus général dans le plan.

Le système des onze axiomes (à savoir les huit axiomes dont nous avons parlé au début et les trois axiomes des déplacements), est polyvalent. Suivant le choix d'un douzième et dernier axiome sur les parallèles nous avons un système d'axiomes complet de la géométrie euclidienne ou de la géométrie de Lobatchevsky et Bolyaï.

---

(1) Cf. *Bulletin* de l'A.P.M. n° 177 de mai 1956, notre étude : « Définition axiomatique des espaces linéaires et leur orientation », et n° 184 de mars 1957, notre étude : « L'axiome de Dedekind et son application à l'étude des parallèles ».

(2) Cf. Robert BRISAC : *Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

2. Définition d'un élément de position

Désignons par A_i un point. Nous allons *définir de proche en proche un élément de position* P^n *à n dimensions,* où n est un entier $\geqslant 0$. Pour :

$n = 0$ P^0 *est un point* A_0 $\qquad P^0 = A_0$

$n = 1$ P^1 *est une demi-droite* $\qquad P^1 = \overset{\bullet}{A_0}\overline{A_1}$

$n = 2$ P^2 *est l'ensemble d'un* P^1 *et d'un demi-plan limité par le support de ce* P^1 ; ce demi-plan est alors déterminé par la donnée d'un point A_2. Notons : $P^2 = \overset{\times}{A_0}\overline{A_1 A_2}$.

Cas général : P^n *est l'ensemble d'un* P^{n-1} *et d'un demi-*E^n *limité par l'espace-support de ce* P^{n-1} Notons :

$$P^n = \overset{\times}{P^{n-1}}\overline{A_n} = \overset{\times}{A_0}\overline{A_1 A_2 \ldots\ldots A_n}$$

Nous appelons les éléments de positions $P^0, P^1, P^2, \ldots, P^{n-1}$, qui interviennent successivement dans la définition de P^n, les *éléments de positions partiels* de P^n.

Nous indiquons encore la notation :

$$\overset{\bullet}{A_0}\overline{A_1} = -\overset{\bullet}{A_0}\overline{A_1}$$

et d'une façon analogue nous écrivons par exemple :

$$\overset{\times}{A_0}\overline{A_1 A_2} \qquad \overset{\times}{A_0}\overline{A_1}\,\overline{A_2} \qquad \overset{\times}{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,\overline{E}\,\overline{F}$$

en convenant chaque fois qu'une lettre (à l'exception de la première) est surmontée du signe — de remplacer le demi-espace défini par le point correspondant par le demi-espace opposé.

A chaque élément de position P^n *correspond l'élément d'orientation* O^n qui s'obtient en remplaçant dans P^n son élément de position partiel P^1 (demi-droite) par la droite orientée définie par ce P^1.

Si deux éléments de position ont la même orientation, nous disons encore que leur *orientation relative* est *positive*, dans le cas contraire leur *orientation relative* est *négative.*

Règle de signe. — Deux éléments de positions, qui sont définis par les mêmes lettres placées dans le même ordre, sont respectivement d'orientation relative positive ou négative si la différence de leurs nombres de signe — est paire ou impaire.

3. Groupe de transformations ponctuelles

Définition : *Un groupe de transformations ponctuelles* G est un ensemble de telles transformations satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Le produit de deux transformations* T_1 *et* T_2 *du groupe est une transformation* T_3 *appartenant aussi au groupe.*

Ou encore : Si $T_1 \in G$ et $T_2 \in G$ on a aussi $T_1 . T_2 \in G$ (nous notons le produit de gauche à droite).

2° *Le produit de plusieurs transformations du groupe est associatif*

$$(T_1 . T_2) . T_3 = T_1 . (T_2 . T_3).$$

3° *La transformation identique* I *fait partie du groupe.* Ou : $I \in G$.

4° *Si* T *est une transformation du groupe, sa transformation inverse* T^{-1} *existe d'une façon unique et fait aussi partie du groupe :* $T^{-1} . T = T . T^{-1} = I$.

Remarques : La condition 2° est vérifiée automatiquement dans le cas des transformations ponctuelles.

Les conditions 1° et 4° entraînent la condition 3°.

Si le produit de deux transformations du groupe est en plus commutatif, on dit que le *groupe* est *commutatif* ou que c'est un *groupe abélien.*

4. Le groupe de transformations linéaires biunivoques

DÉFINITION : *Une transformation linéaire biunivoque* est une transformation ponctuelle biunivoque *conservant les demi-droites.*

La transformation identique satisfait en particulier à cette définition. L'existence d'autres transformations linéaires biunivoques dans un espace linéaire est liée à la nature globale de cet espace. Sans poser de prime abord la question de cette existence, nous allons tirer des conséquences de la définition précédente.

1) La transformation étant biunivoque, *deux points distincts* A *et* B *se transforment toujours en deux points distincts* A' et B'.

2) *Le segment* $AB = \overset{\bullet}{\overline{AB}} \cap \overset{\bullet}{\overline{BA}}$ *se transforme dans le segment*

$$A'B' = \overset{\bullet}{\overline{A'B'}} \cap \overset{\bullet}{\overline{B'A'}}.$$

3) *La droite* $AB = \overset{\bullet}{\overline{AB}} \cup \overset{\bullet}{\overline{BA}}$ *se transforme dans la droite* $A'B' = \overset{\bullet}{\overline{A'B'}} \cup \overset{\bullet}{\overline{B'A'}}$.

4) *Trois points non alignés se transforment en trois points non alignés.* (Si non, la transformation ne peut pas être biunivoque).

Nous en concluons :

5) *L'inverse d'une transformation linéaire biunivoque existe et est aussi une telle transformation.*

6) *Dans un espace linéaire, l'ensemble des transformations linéaires biunivoques est un groupe.*

De la conservation des demi-droites et des axiomes de la demi-droite, il résulte :

7) *La transformation conserve l'ordre des points d'une droite.*

8) *Un angle saillant se transforme en un angle saillant.*

En effet, l'angle saillant $\widehat{AOB}$ est défini par l'ensemble des demi-droites $\overset{\bullet}{\overline{OM}}$ où M $\in$ segment AB. Ces éléments génériques de l'angle donné se transforment dans les éléments génériques de l'angle transformé.

9) *Un angle plat se transforme en un angle plat.*

En effet, il suffit de considérer l'angle plat comme la somme de deux angles saillants supplémentaires.

10) *Un demi-plan se transforme dans un demi-plan.*

11) *Un élément de position* P^2 *se transforme dans un élément de position* P'^2 de *même dimension.*

On généralise de même pour les demi-espaces E^n et les éléments de position P^n.

12) *Une transformation linéaire biunivoque conserve l'orientation relative de deux éléments de position.*

13) *Les deux classes d'éléments de position définissant les deux orientations possibles d'un espace se transforment en deux classes analogues de l'espace transformé.*

14) Dans le cas particulier où nous *transformons linéairement un espace en lui-même,* il y a deux possibilités :

a) *il y a conservation de l'orientation,* la *transformation* est alors dite *positive ;*

b) *il y a changement de l'orientation,* la *transformation* est *négative.*

Alors *les transformations linéaires biunivoques positives* forment *un sous-groupe du groupe des transformations linéaires biunivoques.*

5. Les trois axiomes des déplacements

DÉFINITION : Nous appelons *déplacement dans le plan, ou d'un plan dans un autre plan, toute transformation linéaire biunivoque satisfaisant aux trois axiomes des déplacements* (IV).

Axiome IV, 1 : *Il existe des déplacements dans le plan, ou d'un plan dans un autre plan, un tel déplacement étant entièrement défini par la correspondance de deux éléments de position à deux dimensions.*

NOTATION : Le déplacement faisant correspondre les éléments de position P^2 et P'^2, ainsi que Q^2 et Q'^2 se note :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P'^2) = \text{Dépl}\,(Q^2, Q'^2).$$

DÉFINITION : Le *déplacement* dans le plan est *positif* ou *négatif* selon l'orientation relative de P^2 et P'^2.

Axiome IV, 2 : *Le produit de deux déplacements est un déplacement.*

Ces deux premiers axiomes des déplacements nous permettent d'écrire :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P'^2).\text{Dépl}\,(P'^2, P''^2) = \text{Dépl}\,(P^2, P''^2).$$

DÉFINITION : *La transformation par déplacement d'une droite en elle-même, ou d'une droite en une autre droite est par définition une restriction d'un déplacement d'un plan.*

Axiome IV, 3 : *La transformation d'une droite en une droite par déplacement est entièrement déterminée par la correspondance de deux éléments de position à une dimension.*

Autrement dit : *le déplacement de droite en droite est indépendant des plans passant par ces droites, servant à définir la transformation comme restriction de déplacement de plan en plan.*

En géométrie plane, ce dernier axiome est inutile, il nous servira dans la géométrie des espaces à n dimensions pour $n \geqslant 3$.

6. Le groupe des déplacements dans le plan

Comme conséquence des axiomes IV, 1 et 2, nous avons :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P'^2).\text{Dépl}\,(P'^2, P'^2) = \text{Dépl}\,(P^2, P'^2) \quad \text{et}$$
$$\text{Dépl}\,(P^2, P^2).\text{Dépl}\,(P^2, P'^2) = \text{Dépl}\,(P^2, P'^2),$$

donc :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P^2) = \text{Dépl}\,(P'^2, P'^2) = I \ (= \text{transf. identique}), \text{ d'où :}$$

THÉORÈME I : *La transformation identique est un déplacement.* Considérons maintenant le produit :

$$\text{Dépl}\,(P^2, P'^2).\text{Dépl}\,(P'^2, P^2) = \text{Dépl}\,(P^2, P^2) = I,$$

de même :

$$\text{Dépl}\,(P'^2, P^2).\text{Dépl}\,(P^2, P'^2) = \text{Dépl}\,(P'^2, P'^2) = I, \quad \text{d'où}$$

THÉORÈME II : *La transformation inverse d'un déplacement est toujours bien déterminée et elle est aussi un déplacement.*

D'après les axiomes IV, 1 et 2, et les théorèmes I et II, nous concluons :

THÉORÈME : *Les déplacements dans le plan forment un groupe. Les déplacements positifs dans le plan en forment un sous-groupe.*

SIGNE D'UN DÉPLACEMENT. — Dans le plan, il y a deux déplacements qui font correspondre à une demi-droite $\overset{\bullet}{O}\overline{A}$ une demi-droite $\overset{\bullet}{O'}\overline{A'}$, l'un *positif* et l'autre *négatif*. *Nous attribuons* à ces deux déplacements respectivement *les signes* + *et* —. *Si nous indiquons le signe du déplacement, la correspondance des éléments de posi-*

tion partiels à une dimension est suffisante pour caractériser ces déplacements qui se notent alors :

$$\text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}) \quad \text{ou} \quad \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}).$$

Nous appelons ces éléments de position partiels encore des *repères* dans le plan.

Règle de signe. — 1) *Le produit de deux déplacements de même signe est positif.*

2) *Le produit de deux déplacements de signes différents est négatif.*

Définition : Nous disons que ***deux figures planes sont égales si elles se correspondent dans un déplacement.*** **Dans le même plan nous** distinguons des figures *directement égales* et *inversement égales,* suivant que le déplacement qui les fait correspondre est positif ou négatif.

En particulier, deux figures peuvent être directement et inversement égales. Citons comme exemple deux demi-droites.

Du fait que les déplacements dans le plan forment un groupe, il résulte :

Théorème : *Les figures égales à une figure donnée forment une classe d'équivalence.*

Cette classe d'équivalence définit la *forme de la figure.*

En particulier la forme d'un segment de droite s'appelle la *longueur* de ce segment.

7. Symétrie par rapport à une droite

Soit le déplacement négatif dans le plan, faisant correspondre une demi-droite donnée à elle-même : $\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}})$. Nous avons la relation :

$$\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}}) . \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}}) = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}}) = I$$

Le déplacement considéré est donc une *transformation réciproque.* Etudions maintenant la restriction de cette transformation à la droite invariante OA.

Soit A un point de $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ et A′ son homologue (aussi sur $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$) dans ce déplacement réciproque. Les trois points O, A, A′ se transforment respectivement en O, A′ A. Les déplacements conservant l'ordre sur une droite, les points A et A′ sont nécessairement confondus. Le même raisonnement est valable pour la demi-droite $-\overset{\bullet}{\overline{OA}}$, donc pour toute la droite.

Conclusion : Dans ce déplacement la droite (D) = OA est *invariante point par point,* nous appelons (D) *l'axe de symétrie.*

Pour définir ce déplacement négatif, il suffit de prendre comme repère se correspondant à lui-même une demi-droite quelconque sur l'axe de symétrie (D).

Nous résumons :

Théorème : *Il existe dans le plan un déplacement négatif unique, dans lequel une droite donnée* (D) *est invariante point par point.*

Ce déplacement s'appelle la *symétrie par rapport à la droite* (*ou l'axe*) (D).

$\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ étant une demi-droite quelconque placée sur (D), nous notons la transformation dans le plan

$$\text{Sym}\,(D) = \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{OA}}).$$

Deux points homologues dans cette symétrie sont dits *symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe* (D).

Conséquence de ce théorème : Dans le plan on a :

$$\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}) = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}) . \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{\overline{O'A'}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}).$$

Donc, les deux seuls déplacements dans le plan qui transforment $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ en $\overset{\bullet}{\overline{O'A'}}$ donnent la même restriction définissant le déplacement de la droite OA en la droite O'A'. *En géométrie plane l'axiome* IV, 3 *devient donc un théorème.* Il n'en est plus de même si l'on utilise des plans différents passant par les deux droites, ce qui devient absolument nécessaire pour des droites non coplanaires.

Sur une seule droite, ou de droite en droite, nous notons ce déplacement :

$$\text{Dépl}\,(\overset{\bullet}{\overline{OA}},\ \overset{\bullet}{\overline{O'A'}}).$$

8. Groupe des déplacements sur la droite

Sur une même droite un déplacement peut aussi se définir par la correspondance de deux points (éléments de position partiels à zéro dimensions) et le signe de ce déplacement. Nous notons les deux déplacements transformant O en O' :

$$\text{Dépl}_{(+)}\,(O,\ O') \qquad \text{et} \qquad \text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O').$$

L'ensemble des déplacements positifs et négatifs sur la droite forment un groupe, les déplacements positifs en forment un sous-groupe. Nous reviendrons plus loin au groupe des déplacements positifs appelé encore *le groupe des translations* sur la droite.

Cas particulier où le déplacement sur la droite admet un *point double* O.

1° Le déplacement est positif, alors :

$$\text{Dépl}_{(+)}\,(O,\ O) = I \qquad \text{Donc :}$$

Une translation sur une droite n'a pas de point double, ou elle se réduit à la transformation identique.

2° Le déplacement est négatif, soit $\text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O)$. On a :

$$\text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O).\text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O) = \text{Dépl}_{(+)}\,(O,\ O) = I.$$

Ce déplacement négatif est donc une *transformation réciproque,* elle échange les deux demi-droites d'origine O. Donc O est le seul point double de cette transformation qui s'appelle encore *la symétrie sur la droite par rapport au point* O, notée :

$$\text{Sym}\,(O) = \text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O),$$

O s'appelle le *centre de symétrie.*

Nous allons démontrer que tout déplacement négatif sur la droite est une symétrie par rapport à l'un de ces points.

9. Milieu d'un segment de droite

Soit un segment de droite AB. Orientons son support par la relation d'ordre : $A < B$.

Considérons le déplacement négatif sur la droite transformant A en B ; soient M un point quelconque de la droite et M' son homologue. Nous écrivons la relation :

$$\text{Dépl}_{(-)}\,(A,\ B) = \text{Dépl}_{(-)}\,(M,\ M').$$

Ce déplacement nous permet de *définir une coupure* sur la droite :

Si $M \leqslant M'$, le point M appartient à la classe (I).
Si $M' \leqslant M$, le point M appartient à la classe (II).

Ainsi :

1° Tout point de la droite appartient au moins à l'une des deux classes. Il y a au plus un point commun aux deux classes. En effet, s'il existe un point double O du déplacement, on a :

$$\text{Dépl}_{(-)}\,(A,\ B) = \text{Dépl}_{(-)}\,(O,\ O) = \text{Sym}\,(O).$$

Mais alors O est le seul point double de la transformation, donc le seul point commun aux deux classes.

2° Le point A appartient à la classe (I) et le point B à la classe (II). Donc il y a au moins un point dans chaque classe.

3° Démontrons que si un point $N \leqslant M$ de la classe (I), alors N appartient aussi à la classe (I).

Soit N' l'homologue de N. La transformation étant négative, $N' \leqslant M$ entraîne : $M' \leqslant N'$, mais : $M \leqslant M'$ donc d'après la transitivité de la relation d'ordre on a aussi : $N \leqslant N'$. Donc le point N appartient bien à la classe (1).

D'après l'axiome de Dedekind, il existe un point O commun aux deux classes. C'est le seul point double du déplacement.

THÉORÈME : *Etant donné un segment de droite* AB, *il existe sur ce segment un point unique* O, *tel que* OA = OB.

La symétrie par rapport au point O échange ces deux segments ainsi que les points A et B. On a :

$$\text{Sym (O)} = \text{Dépl}_{(-)}\,(A, B) = \text{Dépl.}_{(-)}\,(B, A).$$

Pour un segment on peut écrire : AB = BA. Avec deux segments égaux AB et CD on a : AB = CD et aussi : AB = DC.

DÉFINITION : Le point unique qui partage un segment en deux segments égaux, ses *moitiés,* s'appelle le *milieu du segment,* c'est aussi *le centre de symétrie* du segment.

Nous pouvons nous répéter sous la forme suivante :

THÉORÈME : *Tout segment de droite admet un milieu.*

10. Bissectrice d'un angle

Soit un angle $\widehat{AOB}$ de côtés $\overset{\bullet}{O}\overline{A}$ et $\overset{\bullet}{O}\overline{B}$. Le déplacement négatif dans le plan qui transforme $\overset{\bullet}{O}\overline{A}$ en $\overset{\bullet}{O}\overline{B}$ transforme un élément générique $\overset{\bullet}{O}\overline{M}$ de l'angle en $\overset{\bullet}{O}\overline{M'}$. Nous notons :

$$\text{Dépl}_{(-)}\,(\overset{\bullet}{O}\overline{A},\ \overset{\bullet}{O}\overline{B}) = \text{Dépl}_{(-)}\,(\overset{\bullet}{O}\overline{M},\ \overset{\bullet}{O}\overline{M'}).$$

Nous pouvons définir sur l'ensemble des éléments génériques de l'angle une coupure, comme nous l'avons fait pour mettre en évidence l'existence du milieu d'un segment de droite AB. Cette coupure nous démontre l'existence d'un élément générique unique $\overset{\bullet}{O}\overline{C}$ de l'angle se transformant en lui-même dans le déplacement qui peut s'écrire :

$$\text{Sym (OC)} = \text{Dépl}_{(-)}\,(\overset{\bullet}{O}\overline{A},\ \overset{\bullet}{O}\overline{B}) = \text{Dépl}_{(-)}\ \ (\overset{\bullet}{O}\overline{B},\ \overset{\bullet}{O}\overline{A}).$$

DÉFINITION : La demi-droite $\overset{\bullet}{O}\overline{C}$ qui partage l'angle $\widehat{AOB}$ en deux angles égaux, ses *moitiés,* s'appelle la *bissectrice* de cet angle.

THÉORÈME : *Tout angle admet une bissectrice.*

Le support de cette bissectrice est *l'axe de symétrie de l'angle.*

DÉFINITION : Nous appelons un *angle nu* l'ensemble de deux demi-droites de même origine.

Un angle nu détermine en général un angle saillant et un angle rentrant. Il y a exception pour l'angle nu plat qui détermine deux angles plats. *Les deux angles définis par un angle nu ont le même axe de symétrie, support de leurs bissectrices qui sont des demi-droites opposées.*

THÉORÈME : *Si deux segments, ou deux angles, sont égaux, leurs moitiés sont aussi égaux.*

En effet, le milieu d'un segment (respectivement la bissectrice d'un angle) étant unique, le déplacement qui transforme un segment (ou un angle) dans son égal, transforme aussi le milieu (ou la bissectrice) dans le milieu (ou dans la bissectrice). D'où la correspondance des moitiés par déplacement.

11. Angle droit et droites perpendiculaires

DÉFINITION : La moitié d'un angle plat s'appelle un *angle droit.*

Deux angles plats étant égaux, leurs moitiés sont égaux, c'est-à-dire *deux angles droits sont égaux.*

Soit un angle plat $\widehat{AOA'}$ et sa bissectrice $\overset{\bullet}{OB}$. Le prolongement $\overset{\bullet}{OB'} = -\overset{\bullet}{OB}$ de cette bissectrice est la bissectrice du deuxième angle plat ayant les mêmes côtés.

Les deux droites AA' et BB' concourantes en O forment donc quatre angles droits. Il faut et il suffit que l'un des quatre angles formés par deux droites concourantes soit droit pour que les trois autres le soient aussi.

DÉFINITION : *Deux droites* qui se coupent en formant un angle droit sont dites *perpendiculaires* l'une à l'autre.

PROBLÈME FONDAMENTAL : *Mener par un point donné une droite perpendiculaire à une droite donnée.*

Ce problème vient d'être résolu dans le cas où le point se trouve sur la droite. La bissectrice d'un angle étant unique, il n'y a qu'une solution.

Considérons maintenant le point donné M non situé sur la droite donnée AB. Soit M' le symétrique de M par rapport à la droite AB. Le segment MM' ayant ses extrémités de part et d'autre de la droite AB coupe cette droite en un point O. Les deux angles plats $\widehat{MOM'}$ admettent chacun la droite AB pour axe de symétrie, donc MM' est perpendiculaire à AB. Soit I un point de la droite AB, on a toujours pour raison de symétrie $\widehat{MIA} = \widehat{M'IA}$; ces moitiés de l'angle $\widehat{MIM'}$ sont droits uniquement dans le cas où l'angle MIM' est plat, c'est-à-dire dans le cas où I se trouve en O. Donc la solution est encore unique. D'où :

THÉORÈME : *Par un point il passe une perpendiculaire, et une seule, à une droite donnée.*

D'où, par l'absurde :

THÉORÈME : *Deux perpendiculaires à une même droite n'ont pas de point commun.*

DÉFINITION : La perpendiculaire élevée au milieu d'un segment s'appelle la *médiatrice* de ce segment.

12. Angles opposés par le sommet. Symétrie par rapport à un point

DÉFINITION : *Deux angles* sont dit *opposés par le sommet,* si les éléments génériques (en particulier les côtés) de l'un de ces angles sont les prolongements des éléments génériques de l'autre angle.

L'axe de symétrie des côtés d'un angle est aussi l'axe de symétrie des prolongements des côtés de cet angle. D'où :

THÉORÈME : *Deux angles opposés par le sommet admettent le même axe de symétrie.* D'où : *Les bissectrices de ces deux angles sont en prolongement l'une de l'autre.*

Considérons maintenant deux droites concourantes AA' et BB', se coupant au point O. Précisons : $\overset{\bullet}{OA} = -\overset{\bullet}{OA'}$ et $\overset{\bullet}{OB} = -\overset{\bullet}{OB'}$.

Il y a deux couples d'angles opposés par le sommet :

1) $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ avec XX' comme axe de symétrie pour chacun des deux angles.

2) $\widehat{AOB'}$ et $\widehat{A'OB}$ avec YY' comme axe de symétrie pour chacun de ces deux angles.

XX' et YY' sont les axes de symétrie pour l'ensemble des deux droites AA' et BB'.

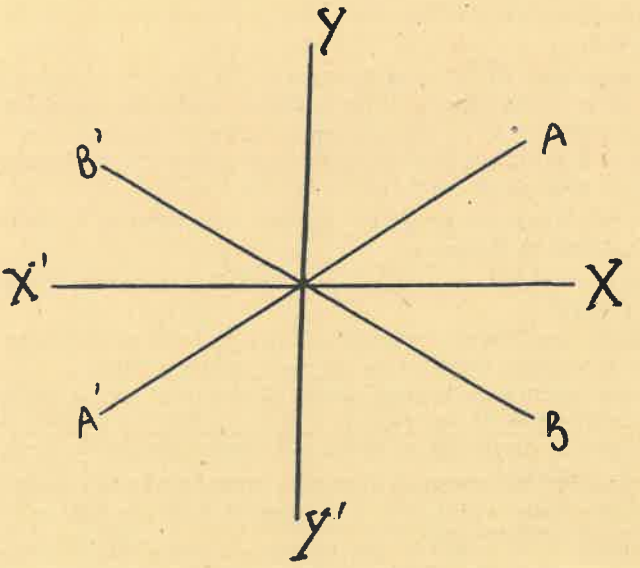


FIG. 1

La symétrie par rapport à YY' échange d'une part $\overset{\bullet}{OA}$ et $\overset{\bullet}{OB'}$ et d'autre part $\overset{\bullet}{OB}$ et $\overset{\bullet}{OA'}$, donc cette symétrie échange les deux angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{B'OA'}$. D'où :

THÉORÈME : *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

Cette symétrie par rapport à la droite YY' échange aussi les bissectrices de ces deux angles opposés par le sommet. D'où : $\widehat{XOY} = \widehat{X'OY}$, ce sont les deux moitiés de l'angle plat $\widehat{XOX'}$. On en conclut :

THÉORÈME : *Les deux axes de symétrie de l'ensemble de deux droites concourantes sont perpendiculaires.*

Considérons le produit des symétries par rapport à ces deux axes :

$$\text{Sym}\,(XX').\text{Sym}\,(YY') =$$

$$\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OX}, \overset{\bullet}{OX}).\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OY}, \overset{\bullet}{OY}) =$$

$$\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OB}).\text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OB}, \overset{\bullet}{OA'}) = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA'}).$$

Si l'on remarque que nous pouvons constituer la figure étudiée, en partant des droites perpendiculaires XX' et YY' se coupant au point O, et que nous pouvons choisir la demi-droite $\overset{\bullet}{OA}$ arbitrairement, nous pouvons conclure :

THÉORÈME : *Il existe un déplacement qui admet un point* O *comme point double et qui transforme chaque demi-droite d'origine* O *dans la demi-droite opposée.*

Ce déplacement positif dans le plan s'appelle la symétrie par rapport au point O, le point O est le *centre de symétrie.*

NOTATION dans le plan :

$$\text{Sym}\,(O) = \text{Dépl}_{(+)}\,(\overset{\bullet}{OA}, -\overset{\bullet}{OA}).$$

Autre conclusion *dans le plan :*

THÉORÈME : *Le produit de deux symétries par rapport à deux axes perpendiculaires est égal à la symétrie par rapport au point d'intersection de ces deux axes.*

13. Translation sur la droite

DÉFINITION d'un *vecteur.* Un vecteur est un segment orienté, ses deux extrémités s'appellent d'une façon distinctive : *origine* et *extrémité ;* l'origine précède l'extrémité.

NOTATION : $\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur d'origine A et d'extrémité B.

DÉFINITION : Si deux vecteurs AB et CD sont directement égaux sur la droite, nous disons encore que ces vecteurs sont *équipollents* (sur la droite) et nous écrivons : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Si deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont inversement égaux sur la droite, nous disons qu'ils sont *opposés* (sur la droite), ce que nous notons : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$.

Remarquons encore que l'ensemble des vecteurs équipollents à un vecteur donné, sur une droite, forme une classe d'équivalence, cette classe définit un *vecteur glissant.*

Considérons *sur la droite la translation* T (c'est-à-dire un déplacement positif) transformant deux points A et B respectivement en A′ et B′. Par *définition :*

$$T = \text{Dépl}_{(+)}\,(A, A') = \text{Dépl}_{(+)}\,(B, B'),$$

$\overrightarrow{AB}$ se transforme par T en $\overrightarrow{A'B'}$, d'où

THÉORÈME : *Une translation sur la droite transforme tout vecteur en un vecteur équipollent.*

De l'équipollence $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, on déduit : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{B'A'}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{B'A'}$ sont inversement égaux, donc ces deux derniers vecteurs sont symétriques l'un de l'autre par rapport au point O, milieu de chacun des segments AB′ et BA′. Cette symétrie échange les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{B'B}$, donc $\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{B'B}$, d'où : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Nous énonçons :

THÉORÈME : *Sur une droite deux vecteurs ayant des origines quelconques et respectivement pour extrémités les transformés par translation de leurs origines, sont équipollents.*

Réciproquement on démontre de la même façon que si $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ on a aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Donc *la translation* T *peut aussi être définie par le vecteur glissant* $\vec{T} = \overrightarrow{AA'}$, A et A′ étant deux points correspondants dans la translation. Nous écrivons encore :

$$T = \text{Transl}\,(\vec{T}) = \text{Transl}\,(\overrightarrow{AA'}).$$

Soit M le milieu du segment $\overrightarrow{AA'}$. On a la relation :

$$\text{Dépl}_{(+)}\,(A, A') = \text{Dépl}_{(-)}\,(A, A).\text{Dépl}_{(-)}\,(A, A')$$

ou avec d'autres notations :

$$\text{Transl}\,(\overrightarrow{AA'}) = \text{Sym}\,(A).\text{Sym}\,(M).$$

Ce qui s'énonce :

THÉORÈME : *Une translation sur la droite peut toujours être interprétée comme le produit de deux symétries par rapport à des points ; l'un des centres de symétrie peut être choisi arbitrairement sur la droite.*

14. Translation dans le plan

DÉFINITION : *Une translation dans un plan est un déplacement positif dont la restriction à une droite, appelée glissière, est une translation sur cette droite.*

Considérons deux points A et B de la glissière et leurs transformés A′ et B′ par la translation T. Nous notons :

1) sur la glissière : $T = \text{Dépl}_{(+)}(A, A') = \text{Dépl}_{(+)}(B, B')$;

2) dans le plan : $T = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{\overline{AB}}, \overset{\bullet}{\overline{A'B'}}) = \text{Dépl}_{(+)}\overset{\bullet}{\overline{AA'}}, -\overset{\bullet}{\overline{A'A}})$. Dans les deux cas nous écrivons encore : $T = \text{Transl}(\vec{T})$, où le *vecteur translation* $\vec{T}$ est un vecteur glissant défini par l'équipollence : $\vec{T} = \overrightarrow{AA'}$.

REMARQUE : Dans la définition intervient une seule droite appelée glissière, c'est seulement en géométrie euclidienne que la glissière n'est pas unique.

Considérons toujours la même translation T ; soit M le milieu du segment AA′ et désignons par A*a* et M*m* les perpendiculaires élevées en A et M à la glissière.

Dans le plan comme sur la droite on a : $T = \text{Sym}(A).\text{Sym}(M)$.

En effet, ce produit est positif et sa restriction à la droite AA′ est la translation T.

Dans le plan nous avons encore : $T = \text{Sym}(Aa).\text{Sym}(Mm)$.

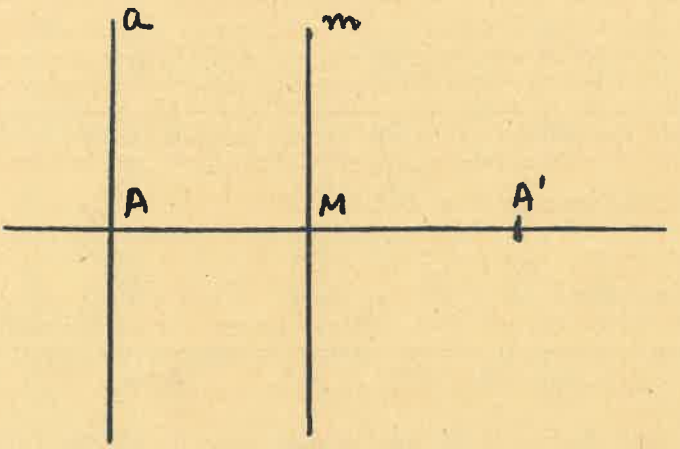


FIG. 2

Il suffit encore de vérifier le signe du déplacement et sa restriction à la droite AA′. D'où :

THÉORÈME : *Une translation dans le plan peut toujours s'interpréter :*

1) *comme produit de deux symétries par rapport à deux points de la glissière, l'un des points pouvant être choisi arbitrairement ;*

2) *comme produit de deux symétries par rapport à deux droites perpendiculaires à la glissière.*

15. Rotation dans le plan

L'angle nu orienté de côté origine $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ et de côté extrémité $\overset{\bullet}{\overline{OB}}$, s'écrit dans ce paragraphe : $(\widehat{OA, OB})$.

Pour exprimer l'égalité directe et l'égalité inverse nous utilisons des notations correspondant aux vecteurs.

DÉFINITION : Une *rotation dans le plan* est un déplacement positif, admettant un point double, appelé *centre de rotation.*

Considérons la rotation R de centre O, transformant les demi-droites $\overset{\bullet}{OA}$ et $\overset{\bullet}{OB}$ respectivement en $\overset{\bullet}{OA'}$ et $\overset{\bullet}{OB'}$. Alors :

$$R = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA'}) = \text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{OB}, \overset{\bullet}{OB'}).$$

Donc nous avons l'égalité directe $(\widehat{OA, OB}) = (\widehat{OA', OB'})$ et par suite aussi la relation : $(\widehat{OA, OB}) = -(\widehat{OB', OA'})$ exprimant une égalité inverse, réalisée dans la symétrie par rapport à l'axe de symétrie de l'angle $\widehat{AOB'}$. Par cette symétrie il y a échange entre $\overset{\bullet}{OA}$ et $\overset{\bullet}{OB'}$ et aussi entre $\overset{\bullet}{OB}$ et $\overset{\bullet}{OA'}$; d'où :

$$(\widehat{OA, OA'}) = -(\widehat{OB', OB}),$$

et par suite : $(\widehat{OA, OA'}) = (\widehat{OB, OB'})$.

La classe des angles, directement égaux à l'un de ces angles, s'appelle l'*angle de rotation* α,

$$\alpha = (\widehat{OA, OA'}) = (\widehat{OB, OB'}).$$

THÉORÈME : *Les angles orientés, ayant pour côté origine une demi-droite quelconque issue du centre de rotation et pour côté extrémité son homologue dans la rotation* R, *sont deux à deux égaux.*

Nous notons la rotation de centre O et d'angle de rotation α : $R = \text{Rot}(O, \alpha)$.

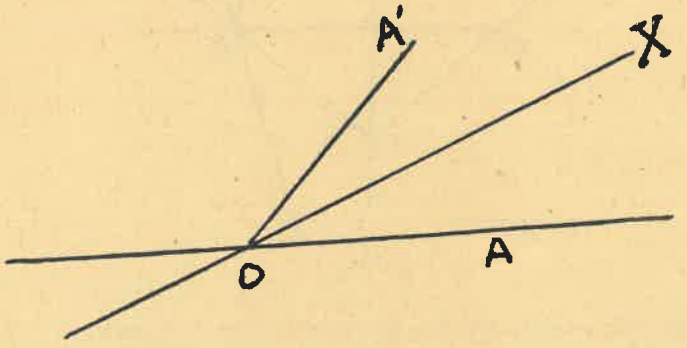


FIG. 3

Nous mettons encore en évidence une propriété analogue à une propriété des translations sur une droite :

$$\text{Dépl}_{(+)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA'}) = \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA}) \cdot \text{Dépl}_{(-)}(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{OA'}),$$

ce qui s'écrit avec d'autres notations :

$$R = \text{Sym}(OA) \cdot \text{Sym}(OX)$$

où OX est l'axe de symétrie de l'angle $\widehat{AOA'}$. Nous énonçons :

THÉORÈME : *Une rotation dans un plan peut toujours s'interpréter comme le produit de deux symétries par rapport à deux axes passant par le centre de rotation, l'un de ces axes pouvant être choisi arbitrairement.*

REMARQUE : Dans le plan, une symétrie par rapport à un point est un cas particulier d'une rotation, l'angle de rotation étant un angle plat.

16. Le problème fondamental de la géométrie métrique dans le plan

Il s'agit d'étudier le déplacement le plus général dans le plan, en distinguant deux cas, suivant le signe de ce déplacement.

I. Le déplacement positif le plus général

Ce déplacement transforme une demi-droite $\overset{\bullet}{OA}$ dans une demi-droite quelconque $\overset{\bullet}{O'A'}$ du plan, il s'écrit : Dépl $_{(+)}$ $(\overset{\bullet}{OA}, \overset{\bullet}{O'A'})$.

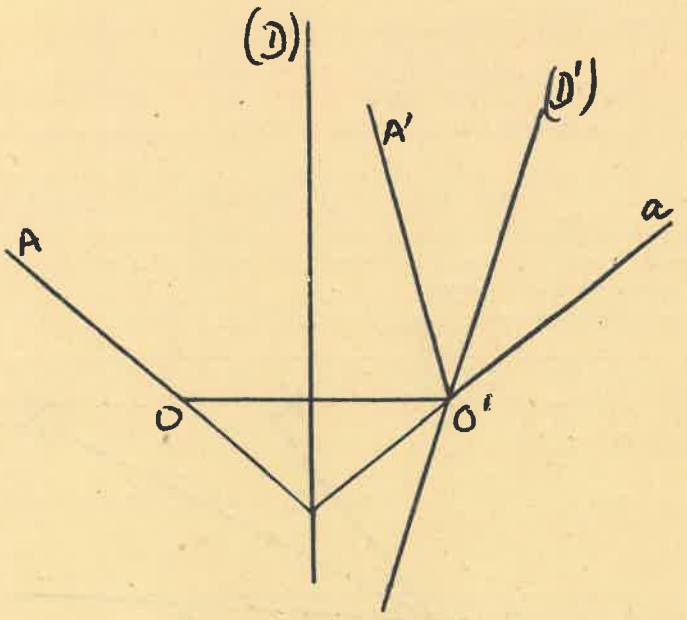


Fig. 4

Considérons le produit des deux symétries axiales suivantes :

1° La symétrie par rapport à la médiatrice (D) du segment OO' ; elle transforme $\overset{\bullet}{OA}$ en $\overset{\bullet}{O'a}$.

2° La symétrie par rapport à l'axe de symétrie (D') de l'angle $\widehat{aO'A'}$; elle transforme $\overset{\bullet}{O'a}$ en $\overset{\bullet}{O'A'}$.

Ce produit est positif et transforme $\overset{\bullet}{OA}$ en $\overset{\bullet}{O'A'}$.

Théorème : *Le déplacement positif le plus général dans le plan peut toujours s'interpréter comme le produit de deux symétries par rapport à des droites.*

Si ces deux droites se coupent, le déplacement est une rotation.

Si ces deux droites admettent une perpendiculaire commune, le déplacement est une translation.

Il se pose encore le problème de savoir si, dans le plan, il peut y avoir deux droites qui ne se coupent pas et qui n'ont pas de perpendiculaire commune. Ce problème peut être résolu seulement après l'introduction d'un axiome sur les parallèles. Suivant

le choix de ce nouvel axiome nous serons amenés à distinguer la géométrie euclidienne et la géométrie de Lobatchevsky et Bolyaï.

Bien entendu, tout ce que nous avons étudié jusqu'ici, basé sur notre système de onze axiomes, est commun aux deux géométries.

II. Le déplacement négatif le plus général

Soit le déplacement : Dépl $_{(-)}$ $(\overset{\bullet}{\overline{OA}}, \overset{\bullet}{\overline{O'A'}})$.

Considérons le produit d'une symétrie par rapport à un point et d'une symétrie par rapport à une droite.

1° La symétrie par rapport au milieu M du segment de droite OO′ transforme $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ en $\overset{\bullet}{\overline{O'a'}}$.

2° La symétrie par rapport à l'axe de symétrie (D) de l'angle $\widehat{a'O'A'}$ transforme $\overset{\bullet}{\overline{O'a'}}$ en $\overset{\bullet}{\overline{O'A'}}$.

Finalement, nous constatons que ce produit est négatif et transforme $\overset{\bullet}{\overline{OA}}$ en $\overset{\bullet}{\overline{O'A'}}$.

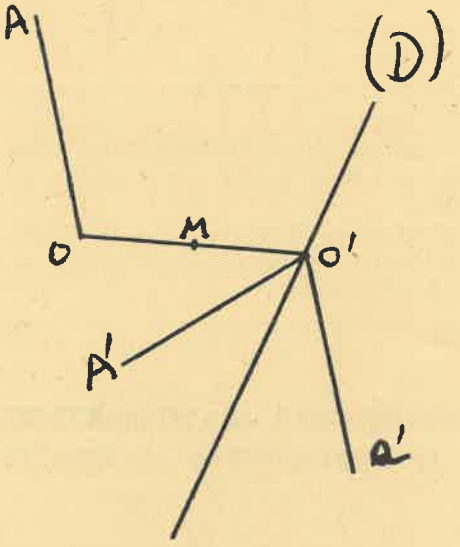


Fig. 5

Théorème : *Le déplacement négatif le plus général dans le plan peut toujours s'interpréter comme le produit d'une symétrie par rapport à un point et d'une symétrie par rapport à une droite.*

Donnons encore une autre interprétation à ce déplacement que nous pouvons écrire maintenant avec d'autres notations :

$$\text{Sym}\,(O)\,.\,\text{Sym}\,(D),$$

où O désigne un point et (D) une droite.

Désignons par (Δ) la perpendiculaire passant par O à (D), et par (D′) la perpendiculaire par O à (Δ). On a :

$\mathrm{Sym}(O) = \mathrm{Sym}(\Delta).\mathrm{Sym}(D')$, d'où :

$\mathrm{Sym}(O).\mathrm{Sym}(D) = \mathrm{Sym}(\Delta).\mathrm{Sym}(D').\mathrm{Sym}(D)$ (produit associatif),

$= \mathrm{Sym}(\Delta).\mathrm{Transl}(\overrightarrow{OO'})$,

où O' est le symétrique du point O par rapport à (D).

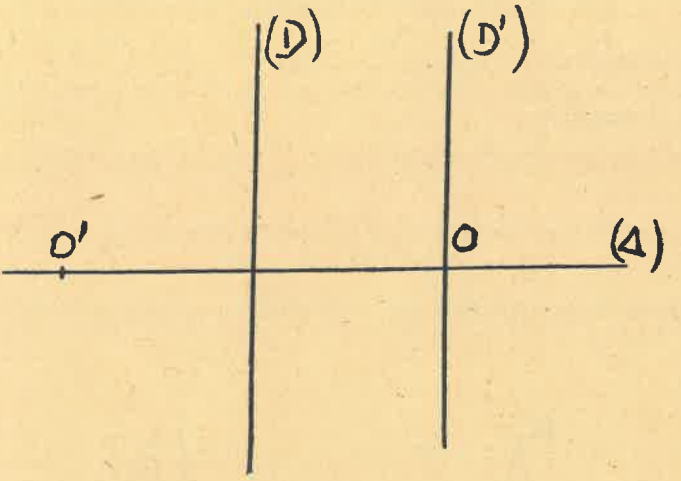


FIG. 6

Ce produit est commutatif, car le changement de l'ordre des deux transformations ne change pas le signe du produit ni sa restriction à la droite (Δ), droite double de la transformation.

THÉORÈME : *Le déplacement négatif dans le plan, le plus général, peut toujours s'interpréter comme le produit commutatif d'une translation et d'une symétrie par rapport à la glissière de cette translation.*

R. N.

STRUCTURES MATHÉMATIQUES ET STRUCTURES MENTALES

par CALEB GATTEGNO

Introduction.

Dans ce chapitre nous nous proposons plutôt d'explorer une direction de recherche que d'arriver à des conclusions finales. Ce que nous soumettons ici à l'attention des lecteurs demandera de nombreuses investigations avant d'atteindre un degré de certitude suffisant pour servir de base à une action rationnelle sur le plan de l'éducation. Néanmoins, il nous semble qu'il est possible, à l'aide de la méthode que nous étudions ici, d'atteindre des résultats plus satisfaisants et d'éclairer une route où la tradition et les tâtonnements nous ont guidés jusqu'ici.

Remarquons, pour commencer, que l'attitude par rapport aux Mathématiques a varié considérablement depuis les origines. Nombres et figures avaient un caractère d'absolu qui en faisait des êtres de contemplation avant tout. A l'époque où la prin-

cipale préoccupation des hommes était leur rapport avec un ou plusieurs êtres surnaturels, les Mathématiques étaient inventions divines, mystères qu'il s'agissait de comprendre. Les idées pures y trouvaient leurs exemples par excellence.

A l'époque où l'attention des hommes se tournait vers la nature et leur rapport avec elle, la Mathématique devenait la voie d'expression du contenu de la nature sous la forme de ses lois. La Mathématique se constituait comme le langage adéquat à l'exploration de la nature terrestre et cosmique, physique et astronomie pour commencer, autres sciences de la nature ensuite. La Mathématique était tributaire des sciences naturelles, bien qu'elle se développât à côté et pour les aider à résoudre leurs difficultés et à exprimer leurs résultats. Si la géométrie restait, pour DESCARTES, le modèle des sciences auquel toutes les autres devaient tenter de ressembler, la mécanique a été en vérité la source des progrès décisifs des XVIIe et XVIIIe siècles. Le calcul différentiel et intégral, NEWTON et LEIBNIZ ont donné le ton : la Mathématique exprime le contenu de l'univers, est un langage universel.

Lorsque l'attention des hommes a été concentrée sur leurs rapports réciproques : politiques, sociaux, économiques, la Mathématique a abandonné l'absolu euclidien pour fonder des géométries diverses ; le point de vue global pour adopter la conception riemannienne du local ; l'idée du définitif pour celle du probable, de l'approximatif ; transformant de la sorte l'idée de la nature en un ensemble de relations posées par les chercheurs et que leur habileté technique permet de conduire à un certain degré d'achèvement. L'atomisme physique exige ses méthodes propres : l'intuition et la rigueur délimitent leurs champs.

Mais lorsque l'homme se découvre lui-même au centre de son univers construit par lui, la crise des fondements apparaît dans le domaine que nous examinons, les Mathématiques. Les travaux de CANTOR sur l'infini et les ensembles, les attaques par les logisticiens, la formalisation des Mathématiques, les espaces abstraits, etc... amènent de plus en plus la conviction que les Mathématiques sont une activité mentale réglementée par ses propres lois et que beaucoup de faux problèmes ont été posés à cause de préjugés inconscients ou d'incompréhension flagrante.

Ce tableau rapide nous conduit à l'orée de notre problème. Si la Mathématique n'est plus la contemplation d'un aspect de l'absolu, du divin, si elle n'est pas le langage de la physique, si elle n'est pas la voie de communication entre les hommes (en tant qu'êtres sociaux à un certain degré de civilisation) lorsqu'ils traitent de leurs perceptions, de leurs inventions, de leurs organisations mécaniques, électriques, industrielles, etc..., si elle est au contraire une activité mentale d'hommes que cela intéresse et occupe, le psychologue a quelque chose à dire qui est, peut-être, utile.

Nous allons donc considérer successivement : les conséquences de cette prise de conscience ; sa signification dans les rapports des Mathématiques aux autres activités humaines ; le sens dans lequel une pédagogie, avertie de ces données, peut servir la cause d'une meilleure compréhension de la tendance présente.

1. Mathématiques et psychologie.

Les psychologues en général ne sont pas mathématiciens, bien que nombreux soient les psychologues qui apprennent une certaine Mathématique et l'appliquent à leurs recherches. Il en résulte que rarement le psychologue se permette de regarder la Mathématique comme une activité. Elle est un outil, qui le dépasse le plus souvent, et qu'il craint de juger.

Depuis la crise des fondements, les mathématiciens ont fait eux-mêmes l'introspection qu'aucun psychologue ne pouvait faire. Cette introspection est exprimée en langage ésotérique dans des milliers de travaux publiés dans tout le monde depuis plus de soixante ans.

Cette longue crise des Mathématiques n'a pas empêché les moins scrupuleux (ou les plus scrupuleux dans leurs moments d'accalmie) de poursuivre leurs travaux

créateurs. En vérité, nul parmi les mathématiciens, ne croyait vraiment que les Mathématiques étaient un édifice véreux. La question était plutôt de se dégager d'idées préconçues et cela leur était aussi pénible que dans tout autre domaine de la vie. La crise était une espèce de névrose collective avec une idée fixe : voir clair dans cet immense domaine aux branches si diversifiées. En particulier les répercussions des antinomies, des nouvelles idées de la physique forçaient à une révision du contenu des Mathématiques qui s'appuyaient sur l'expérience, ou sur lequel l'expérience courante s'appuyait.

Nous pouvons résumer la crise (que d'aucuns croient loin d'être terminée), en disant qu'elle est le choc de la découverte, en termes qui vont de plus en plus en se précisant, que la Mathématique est une activité créatrice de l'esprit humain.

Pour le mathématicien non-psychologue et tout entier pris par son activité, le sentiment qu'il y a une crise des fondements de son activité doit être particulièrement troublant. Seuls les mathématiciens capables de philosopher ont pris part à l'étude de la solution de la crise. Le récit en est trop long pour être adéquatement résumé. Qu'il nous suffise de dire que la vigueur de l'arbre rendait fort improbable le danger que les racines soient pourries ; les deux principales tendances ont été, l'une de rechercher une base plus certaine pour tout l'édifice dans une de ses branches qu'il faudrait alors examiner minutieusement (et ce fut, après analyse, la suite des nombres entiers qui fut choisie), et l'autre de demander assistance à des disciplines plus vastes que la Mathématique. La logique fut essayée, mais lentement elle a été absorbée par la Mathématique en changeant de nom : on l'appelle logistique, logique combinatoire, théorie des fondements, etc...

La psychologie aussi fut sollicitée. Mais comme on ne sait pas encore aujourd'hui ce qu'il faut entendre par le mot psychologie : science de laboratoire, science non normée, science biologique, science de l'inconscient, des émotions, etc..., l'aide à en attendre, variait avec le psychologue sollicité.

Ici nous allons faire œuvre de pionnier et faire usage d'une attitude personnelle envers le problème des activités humaines. Ailleurs nous avons développé notre conception de la psychologie comme science du temps. Nous n'y reviendrons pas ici. Le propre de l'activité mentale est qu'elle est temporelle et qu'elle demande du temps pour s'objectiver : le temps en certaines circonstances et par certaines transformations peut se ramener au temps public. La pensée est activité temporelle et il en est ainsi de la pensée mathématique en particulier. Le sentiment que la pensée se structure en vérité, lorsque le sujet est actif intellectuellement, ne peut être éludé et c'est sur cette certitude de ma pensée structurée et structurante que la certitude du bien-fondé des Mathématiques repose.

Il faut se rendre compte de la nouveauté de cette attitude. Malgré le Cogito de Descartes, le mathématicien accède à la certitude, par sa participation à la Mathématique constituée, à laquelle il accorde la solidité et la vigueur acquises dans l'acte social d'apprentissage sans qu'il soit question (ou même possible de douter) de la solidité des fondements, Aujourd'hui des mathématiciens nombreux, ayant essayé toutes les voies « horizontales » d'issue, ont atteint la certitude, en reconnaissant pour seuls fondements de leur activité, l'activité même de leur pensée mathématique définie pour eux en ses propres termes.

Leibniz déjà avait amorcé la substitution des relations aux objets, dans la contemplation métaphysique, mais ce fut l'œuvre de la Mathématique du XIXe siècle de familiariser l'esprit avec la considération de nouveaux êtres abstraits qui n'étaient que relations et pour lesquels on créait des algèbres. Les relations, plus facilement que les objets, apparaissent comme des créations de l'esprit. Les travaux de Dedekind, Frege, Hilbert, etc..., au tournant du siècle, avancèrent davantage dans la direction de l'être abstrait et des relations *a priori*, source de compréhension des *structures* des chapitres étudiés. Ce grand pas en avant ne peut être trop souligné.

C'est le pas qui devait permettre la prise de conscience de l'objet réel des Mathématiques et ramener la crise des fondements à une question de psychologie.

S'il existe des chapitres parallèles des Mathématiques, qui ne restent séparés que parce que le mathématicien décide de nommer l'être abstrait d'une certaine façon ici, d'une autre façon là, la nature même de l'activité mathématique veut qu'on fonde ces chapitres et qu'on étudie les structures abstraites qu'ils impliquent. Ce n'est pas principe d'économie seulement, mais nécessité humaine qui ne descend du général au particulier que forcée ; la communication humaine serait impossible sans la substitution du général au particulier, si le particulier seul devait être utilisé.

Dès que l'attention est portée sur les structures, on voit bien que l'activité mathématique n'a jamais été autre chose que l'étude de relations définies entre des êtres définis et que ces définitions se justifient intérieurement aux yeux du mathématicien, c'est-à-dire par les soins de l'activité elle-même. C'était la vision préconçue des savants, leur manque d'intérêt pour l'examen de ce genre de question, qui leur a fait prendre pour autre chose ce qu'ils étaient en train de faire. La Mathématique étudie les structures qu'elle crée suivant des lois qu'elle s'impose. C'est-à-dire que le mathématicien appelle Mathématique une activité où entrent en jeu certaines structures mentales définies par lui, en rapport avec d'autres structures mentales qu'il emprunte à d'autres mathématiciens.

Dire que les Mathématiques sont une activité portant sur des structures mentales particulières c'est dire deux choses. D'une part, c'est utiliser la langue psychologique et par suite introduire une préoccupation nouvelle, et, d'autre part, c'est poser le problème des Mathématiques en termes humains exclusivement. Nous n'avons d'autre justification pour le faire que la fécondité de ce point de vue nouveau.

Quand le mathématicien est remonté jusqu'au point où il peut poser ses axiomes de structures, il s'arrête presque. Il va bien essayer d'ordonner les structures, mais sa fonction principale est de créer du nouveau, d'objectiver des structures inconnues, de tirer au net leurs propriétés.

Mais le psychologue trouve sa tâche bien simplifiée par la contribution de cette prise de conscience du mathématicien. En effet, il voit qu'il peut décrire toute la réalité humaine en termes de structures mentales et les Mathématiques deviennent une activité particulière intégrée et mise à sa place. Il voit que la créativité humaine ne peut lui échapper, non plus que rester en dehors de sa description scientifique. Il voit que le problème des diverses sciences et de l'univers naturel et humain n'est pas un nouveau problème et qu'il ne court pas le danger d'être exclusivement psychologique dans son analyse.

La notion de structure en mathématique a permis une clarification intérieure des Mathématiques elles-mêmes, une purification d'où les pseudo-problèmes étaient éliminés. Elle a servi également à fonder les Mathématiques sur elles-mêmes en en faisant une activité mentale autonome et organisée suivant ses propres lois à tous les échelons. Elle a servi à donner un outil à la psychologie qui, du fait de son origine, sait qu'il s'applique adéquatement à la Mathématique (existante et qui est en train de se faire), et peut être utilisé dans l'étude d'autres problèmes. Elle a donc servi la double fonction de comprendre une activité intellectuelle fondamentale de l'humanité, et de féconder la science qui doit expliquer *toutes* les activités humaines.

En psychologie, une notion primitive est celle de structure mentale.

2. Evolution mentale dans l'apprentissage des sciences mathématiques et autres.

Maintenant que notre attitude est de considérer l'homme en son activité, plutôt que dans sa dépendance à un être surnaturel (théologie), ou dans la nature, objet naturel (physique, chimie, biologie), ou dans ses rapports avec l'état (politique), ou ses confrères (sociologie, anthropologie), il nous faut expliquer, d'une part, la

floraison de ses activités, et, d'autre part, ce qui arrive à chaque individu dans son évolution mentale qui emprunte les sciences existantes.

Dans la section précédente nous avons vu la notion de structure mathématique comme structure mentale. Y a-t-il dans les autres activités humaines quelque équivalent pour les structures mentales ? Il semblerait qu'il soit plus facile de réduire les Mathématiques que la physique à une activité mentale.

Notons d'abord que le problème de réduction se pose de deux manières. S'agit-il de réduire la science à une activité mentale ou le réel tout entier ? La première question est plus facile et ne semblerait pas soulever les mêmes objections que la seconde, puisque science veut dire connaissance et qu'on ne peut concevoir celle-ci sans une activité humaine qui l'atteigne, l'entretienne, la communique. Pourtant, nul ne peut nier que le réel, en tant que tout donné d'avance, est une idée bien difficile à accepter. Il semblerait plutôt que le réel se dévoile à nous à la suite de la connaissance, de l'activité qui lui substitue des structures mentales qui entrent mentalement en jeu. Mais n'y insistons pas.

Le vrai problème, nous semble-t-il, est de savoir si nous pouvons utiliser la notion de structures mentales pour expliquer l'apparition des structures spécialisées dont s'occupent les diverses sciences. Si cela était possible, l'autre question recevrait une réponse en même temps, nous semble-t-il.

Dans notre article, *Remarques sur les Structures mentales* (« *Enfance* », n° 3, 1951, Paris, Presses Universitaires), nous avons parlé de structures mentales somatiques, indiquant par là que nous considérions toute organisation de nos organes à la disposition d'une activité quelconque, comme une structure mentale, même si l'élément somatique prédominait. Depuis que cet article a été écrit, nous avons trouvé expérimentalement que les structures mentales les plus évoluées ont un soutien somatique qui est le même sur tout le corps des sujets et est invariant d'un sujet à l'autre, compte tenu d'altérations dues à la personnalité (1). Pour notre but présent, il suffira de demander au lecteur d'accepter que les structures mentales commencent par être somatiques ou encore que le soma, dans son évolution embryologique, procure toutes les organisations fonctionnelles que nous appellerons les structures mentales somatiques et sur lesquelles se grefferont, ou desquelles jailliront, les autres structures mentales.

Dans la constitution de son expérience, l'homme crée les structures mentales qui remplaceront l'expérience passée et permettront l'expérience future de plus en plus éloignée du support somatique. Cet étagement organique, intégré dans le moi, est l'expérience mentale que le psychologue a à décrire.

La vie embryonnaire, aussi bien que la toute petite enfance, et que le reste de la vie, doit être prise en considération. Dans un autre mémoire : *Psychologie de la pensée ou psychologie de l'intelligence*, nous développerons le détail de ce point. Ici, acceptons que l'expérience humaine suive une direction déterminée du point de vue mental (PIAGET l'a démontré de son point de vue et pour l'intelligence), partant des structures initiales somatiques et se compliquant en structures mentales englobant des structures primitives rendues plus mobiles et plus compréhensives. Ce seront alors les caractères des structures mentales qui formeront les catégories du réel. Les structures les plus anciennes étant support commun pour les structures différenciées. Ce serait par l'intermédiaire des premières que l'expérience individuelle semble une malgré les développements relatifs différents des plus récentes. Les structures somatiques appartiennent à toutes les suivantes, mais les structures plus évoluées (en tant que fonctions du temps) peuvent ne former qu'un type qui se développe sur lui-même, par exemple les structures mathématiques. Ainsi, dans le dessin enfantin on peut déceler une complication *sui generis* indiquant la façon dont l'image se déve-

(1) Voir « Un nouveau phénomène psycho-somatique », C. GATTEGNO, A. GAY, Delachaux et Niestlé, 1952, Neuchâtel.

loppe ; dans les jeux des enfants on trouve une structuration active d'abord qui tend à devenir plus abstraite pour englober plus tard des structures mentales du type mathématique (mots croisés, jeu d'échec, bridge...) ou du type de la physique ou de la chimie (mécano, bateau, expériences avec les couleurs...) ou du type des sciences biologiques (collections diverses, classifications...). Il appert donc que la spécialisation des structures mentales est attachée à un intérêt de l'individu qui trouve dans son milieu, à cause des âges différents des membres du groupe, une expérience objectivée sous forme de structures accessibles. La multitude des combinaisons possibles des spécialisations accessibles rend compte de la multitude des comportements mentaux individuels. Chaque individu peut développer telle ou telle structure mentale au-delà de sa représentation dans le groupe et ajouter aux structures accessibles. L'accessibilité, en fait, résulte de ce que ce sont des structures mentales qui sont objectivées à partir d'autres structures accessibles.

Ce double mouvement d'objectivation de l'individu et d'accessibilité dans le groupe fait que la vie mentale est simultanément une activité individuelle et collective. Du point de vue individuel l'activité est créatrice, même s'il s'agit de structures existant dans l'expérience d'autres membres du groupe. Du point de vue collectif, il y a des structures codifiées et des structures à codifier. Les premières forment la connaissance existante, l'autre la science en train de se faire. Evidemment, c'est par abstraction que nous pouvons les appeler structures collectives. Elles sont présentes dans l'esprit d'un certain nombre de membres du groupe et nous considérons cela comme équivalent à être dans le groupe.

Les enfants actuels trouvent dans le groupe des structures mentales accessibles qu'ils intègrent, ou, mieux, dont ils objectivent les équivalents. L'utilisation des structures somatiques, pour objectiver certaines structures mentales conformes, se fait dans les jeux qui appartiennent au groupe, dans l'apprentissage du langage, dans l'adoption des rites et usages, dans l'adaptation aux conditions géographiques particulières. Mais à côté des structures conformes, il y a la possibilité de combiner les comportements et de produire les nouvelles constellations en variance avec le milieu. C'est cette variation qui introduit l'élément personnel, temporel. Sa poussée est créatrice dans le groupe — par contraste à la créativité individuelle permanente, — mais elle peut laisser sa place à une statification conformiste totale.

Les catégories se forment dans la constitution de structures s'appuyant les unes sur les autres. Si l'individu qui introduit la variation obtient des imitateurs, la variation entre dans les structures conformes dont les variations ultérieures qui en procéderont constituent des branches structurées. Ainsi de la musique. Chaque instrument a son champ, chaque thème ses variantes, chaque combinaison ses exigences et ses possibilités. Ainsi de la physique. Chaque sens a ses qualifications, chaque combinaison de sens ses limitations et ses contributions sous forme d'appareils, chaque conquête instrumentale un champ relatif.

C'est en parvenant à l'exhaustion des capacités d'extension des structures en question et de leur combinaison, que l'esprit saisit le mécanisme de l'objectivation en pleine activité. Tant que l'objectivation est aisée, elle tend à être inconsciente. Dans l'apprentissage de l'enfant, il y a chevauchement entre diverses objectivations nouvelles et l'utilisation automatique de structures antérieures. D'où coexistence, dans tous les esprits, de catégories de toutes sortes, non nécessairement du même niveau, ni même coordonnées.

En résumé, le fait que les mêmes structures initiales donnent naissance à des catégories différentes, n'a rien de contradictoire si on accepte le point de vue de l'objectivation créatrice, de la variation sur les structures collectives. Les catégories des structures, par leur différence, forment les branches du savoir, mais par leur coordination intérieure dans l'individu, soit dans son évolution mentale spontanée, soit dans sa capacité d'objectivation particulière, elles font l'unité de la vie mentale

personnelle et forment le lien entre les branches. Point n'est besoin de faire appel à un Réel, un et permanent, pour cela.

Comme il peut produire la Mathématique, l'esprit humain produit toutes les autres catégories de structures et leur lien en lui est suffisant pour rendre compte de l'applicabilité des Mathématiques au monde physique, biologique ou social. Ce ne serait pas à cause d'une raison transcendante que la Mathématique est adéquate pour la description du réel, mais parce que notre appréhension du réel est atteinte par l'intermédiaire de structures mentales de même essence que les structures mathématiques. La psychologie, ici, enlève à la métaphysique un autre problème et lui donne une réponse immédiate et raisonnable. Il suffit de regarder de quelle façon l'apprentissage de la vie mentale a lieu effectivement dans le temps, pour l'individu et pour la collectivité, pour saisir que la spécialisation des structures mentales est un des procédés par lequel elles se constituent et s'épanouissent.

Dans la prochaine section, nous allons examiner de quelle façon, chez nos élèves, certaines structures mentales se transforment en structures mathématiques. La même étude pour les autres catégories, enrichirait notre compréhension de la pédagogie en action.

3. L'expérimentation en cours.

Le problème que nous nous sommes posé peut s'exprimer ainsi. Les élèves, dans toutes nos écoles, disposent déjà de structures mentales nombreuses : ils peuvent utiliser leur corps, leurs organes des sens, pour se constituer des structures fonctionnelles et des images ; ils sont parvenus à parler et ils jouent plusieurs jeux. Plus tard, ils auront une expérience sociale plus ou moins poussée, sauront évoquer des situations et les suivre en imagination, s'assurant de la vraisemblance de certaines affirmations par un jugement impliquant leur expérience. C'est à partir de ces données que nous devons commencer notre travail de spécialisation.

Il nous semble évident que la base de tout enseignement, mathématique ou autre, doit être formée par les structures existantes. Commençant avec des élèves de l'Enseignement Secondaire, nous avons supposé que le seul acquis présent était la capacité de regarder et d'agir et nous avons établi une suite de situations qui devenaient de plus en plus abstraites, mais qui étaient en rapport avec les premières. Les maîtres n'avaient qu'une tâche : s'assurer que les élèves déplaçaient leur intérêt d'une situation à l'autre après avoir maîtrisé le contenu de la première.

Nous allons ici résumer seulement une de nos recherches pédagogiques se référant à la géométrie. Cela suffira à donner une idée de la méthode. Il nous faut dire aussi que la méthode est beaucoup plus souple que notre exemple et que nous l'avons étendue à l'ensemble du programme scolaire et à une partie de l'enseignement universitaire mathématique.

Une autre remarque préliminaire importante concerne notre croyance que l'enseignement de la géométrie aux élèves ne doit aucunement suivre un ordre logique semblable à celui d'EUCLIDE ou de LEGENDRE. De toute façon les résultats de l'enseignement traditionnel de la géométrie sont hybrides : nous avons deux tendances contraires en action, nous désirons transmettre un sens de la rigueur et nous enseignons que les propositions, vraies localement, sont également vraies dans tout l'espace. ce qui ne peut résulter que d'un traitement très différent de la matière du programme (2).

Nos élèves ont un compas et peuvent dessiner un cercle qui délimite un espace à l'intérieur duquel ils peuvent produire des figures et découvrir leurs propriétés par simple inspection. L'exploration du cercle a lieu d'abord spontanément à l'aide

(2) Notre étude sur cette question paraîtra ailleurs.

du seul compas, les figures obtenues sont colorées et sont d'une variété tout à fait remarquable. L'usage du compas seul permet d'établir une familiarité avec les figures circulaires en particulier : les symétries par rapport au centre ; les cercles concentriques ; les fuseaux ; un certain nombre de divisions du cercle en parties égales superposables par rotation, etc... Un fait remarquable et qui est un tournant dans l'étude spontanée est la sortie à l'extérieur du cercle initial qui a servi d'espace antérieurement. Cela nous annonce que l'élève est prêt à examiner le voisinage et nous en profitons.

Nous demandons alors aux élèves de tracer deux familles de cercles concentriques dont les centres ne sont pas trop éloignés sur une feuille. Si les rayons croissent, on en arrive, en prenant les couples de cercles égaux à voir que les points d'intersections sont alignés. Cette expérience est frappante et tous les enfants suivis (plusieurs centaines depuis cinq ans) sont parvenus à voir le fait, à tracer la droite et à dire des phrases plus ou moins correctes à son sujet. On parvient assez aisément à leur faire découvrir que tous les points de cette droite sont à égales distances des deux centres et que tout couple de nouveaux cercles de mêmes rayons dans la famille fournira des points d'intersection sur la droite.

La règle (ligne droite) est introduite en ce point. Elle est maintenant un instrument utile. On peut l'utiliser pour le lieu ci-dessus, mais aussi pour joindre les deux centres. L'examen de la figure ainsi complétée conduit à de nouvelles découvertes. Les cercles se coupent si leur rayon est supérieur à la moitié de la distance des centres. La ligne des centres est un axe de symétrie. Le lieu ci-dessus par construction divise en deux parties égales la ligne des centres ; la symétrie apprend que les angles sont égaux au point d'intersection, le pliage, si nécessaire, assurera de leur superposition ; les mots : angle droit et perpendiculaire sont acceptés.

De ce début on revient au cercle unique et à l'hexagone inscrit qui n'avait pu être tracé à l'aide du seul compas, mais dont les sommets avaient été trouvés précédemment. La nouvelle figure et ses diagonales fournissent une foule de propositions et l'apprentissage de polygones divers (triangles équilatéraux, losanges, trapèzes isocèles, triangles rectangles) et de leurs égalités respectives qui résultent du groupe des rotations autour du centre. L'abstraction de cet ensemble de chacune des figures crée les structures mentales correspondantes qui gagnent leurs degrés de libertés lorsque l'élève expérimente l'indépendance de ses conclusions des dimensions du cercle initial, de la position du premier sommet de l'hexagone sur la circonférence, de la rotation du cercle autour de son centre, de la translation du cercle sur la feuille, du déplacement de la feuille dans l'espace.

La phase suivante est dans l'utilisation d'un autre cercle centré sur un sommet de l'hexagone et de même rayon. Alors une des diagonales est la corde commune. Ce problème est rattaché au lieu ci-dessus et l'extension évidente est de fixer un des cercles et de diminuer ou augmenter le rayon de l'autre. On obtient les résultats sur les cordes et le diamètre (bissection, orthogonalité, longueur relative comme fonction croissante ou décroissante de la distance au centre, etc...). De plus, la construction d'un triangle et de ses symétriques par rapport aux côtés connaissant les trois côtés s'ensuit.

Pour le moment, le regard et l'action ont suffi à engendrer toute la connaissance mise en relief. Sa vérité résulte de l'évidence mentale que fournissent la perception et l'action. Laissant de côté toutes les extensions possibles de cette méthode à une foule d'autres faits géométriques, voici deux autres extensions des structures mentales existantes dans la direction d'une prise de conscience mathématique plus profonde même si sa rigueur peut paraître insuffisante à certains maîtres.

Les élèves reconnaissent facilement, même à 11 ou 12 ans, qu'on peut tracer une multitude de lignes au tableau ou sur une feuille de papier. Ils reconnaissent également qu'il existe des lignes fermées et d'autres non fermées. Une ligne de la première catégorie a la propriété évidente d'enfermer une partie du plan à son inté-

rieur. En s'assurant que les lignes utilisées ont été déformées par continuité pour être assez simples et ne pas avoir des propriétés gênantes, on peut facilement obtenir des élèves qu'étant donné une courbe simple fermée (C), les courbes non fermées illimitées qu'on peut tracer dans le plan forment trois catégories suivant qu'elles sont tout à l'extérieur de (C), ont des points à l'intérieur de (C) ou touchent (C). Cette classification est purement topologique et les élèves, une fois la surprise passée, arrivent très vite à l'énoncer et à la trouver évidente. Si on remplace la courbe fermée par un cercle et les lignes ouvertes par des droites, on spécialise et on peut dire davantage de choses sur la figure. En particulier les tangentes au cercle et leurs propriétés métriques en découlent.

La seconde extension est une variante de la précédente. Toutes nos illustrations utilisent le contenu intuitif ; maintenant nous allons utiliser intuitivement les sections de DEDEKIND. Etant donné un demi-cercle et une demi-droite, issue du centre, en prenant un point assez proche du centre et le joignant aux extrémités d'un diamètre, nous formons un angle obtus (presque plat) ; en choisissant un point très éloigné sur la demi-droite, l'angle correspondant obtenu est presque nul, il est aigu visiblement. Tous les points au-delà de celui-ci, ou en-deçà du premier, jouissent de leurs propriétés respectivement et nous formons deux classes de points sur la demi-droite, ceux qui fournissent un angle aigu et dont le sommet se trouve à l'extrémité du demi-cercle, ceux qui fournissent un angle obtus et sont à l'intérieur. Le point sur la circonférence n'est ni dehors, ni dedans, l'angle formé n'est ni aigu, ni obtus, il est droit.

Bien que convaincu que nous aurons contre nous beaucoup de professeurs de Mathématiques, il nous a semblé nécessaire d'accepter de prêter notre flanc à leurs critiques, espérant tout de même que certains de nos collègues de l'Enseignement Secondaire trouveront dans notre suggestion une solution à leurs difficultés sans tomber dans le ridicule des méthodes enfantines. En effet, il nous semble que le sacrifice de rigueur de notre part n'est rien si nous pensons que nos élèves, de toute façon, ne l'apprécient pas comme nous, et que dans notre propre pensée la perception, l'action, l'intuition, jouent un rôle constant et créateur. Dans notre traitement de ces points du programme nous avons conservé l'attitude du mathématicien qui, par inspection intellectuelle d'une situation, déduit ou abstrait ce qui lui paraît significatif et alors seulement y met de l'ordre, ce que nous appelons rigueur. Nos élèves formés par nos méthodes sont bien plus alertes que ceux qui étudient les cours traditionnels et moins enclins à croire que les Mathématiques sont une science empirique où tout s'établit par des mesures approchées.

Conclusion.

Nos trois sections sont très différentes apparemment, la dernière étant très élémentaire et les deux autres très générales. Le contraste est surtout dû au fait que le domaine qui nous a occupé est très vaste et que le vocabulaire utilisé est en train d'être établi. Il nous a semblé nécessaire de dire ce que le psychologue peut apprendre du mathématicien moderne, et celui-ci du psychologue moderne. La synthèse finale est sur le terrain pédagogique où l'évolution de la pensée est une condition du succès et où la Mathématique peut gagner tout son sens d'activité mentale pour le maître et l'élève. De plus, il y a là un nouveau terrain à explorer pour les maîtres qui n'ont pu parvenir à se consacrer à la créativité mathématique et qui savent que leur premier devoir est de faire que leurs élèves les dépassent et entrent dans l'avenir bien équipés et si possible, non seulement non-traumatisés, mais heureux.

Seuls, les maîtres dans leur travail quotidien peuvent faire la synthèse qui s'impose aujourd'hui. En examinant la texture de leur activité et celle de leurs élèves ils découvriront la vérité de la psychologie de la pensée.

Cette courte analyse devrait être considérée comme une contribution modeste à cette immense tâche pleine de promesses.

Caleb GATTEGNO.

III. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES

LE DANGER DU FORMALISME ET DU VERBALISME DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE (1)

I. *FORMALISME ET VERBALISME DANS LA PENSEE MATHEMATIQUE DE L'ELEVE.*

L'un des buts principaux de l'enseignement des Mathématiques est d'éveiller et de développer chez l'élève une attitude active qui se manifeste surtout dans une certaine disposition à s'attaquer aux problèmes de manière efficace. L'attitude active à l'égard des problèmes scientifiques et de ceux de la vie pratique, l'habitude de poser correctement un problème, de rechercher la solution la plus juste, le choix de la meilleure voie possible, la capacité de prévoir et d'apprécier d'une manière critique les résultats : voilà les bases essentielles d'une véritable formation scientifique. Un enseignement des Mathématiques qui soit en accord avec les progrès de la science et de la psychologie, nous donne la possibilité de réaliser ces buts. Au contraire, les erreurs commises par les professeurs dans leur enseignement peuvent déformer la pensée de l'élève d'une manière encore plus nuisible dans le domaine des Mathématiques que dans celui des autres disciplines.

Je voudrais étudier dans cet article deux déformations possibles de la pensée de l'élève, que l'on appelle le « formalisme » et le « verbalisme ». L'attitude active de l'élève ne me semble possible que dans le cas d'une assimilation profonde des idées, d'une juste et consciente interprétation des symboles et d'une compréhension du sens des opérations exécutées. De plus, une certaine habileté dans le domaine des opérations élémentaires est indispensable et permettra à l'élève de se concentrer sur le nœud du problème. L'automatisation des opérations élémentaires, ainsi que l'attitude active vis-à-vis des problèmes, se complètent mutuellement, assurant l'habileté dans l'usage de l'appareil mathématique.

En utilisant le terme « formalisme » (2), dans son sens négatif, j'ai en vue le développement exagéré de l'un des facteurs précités qui déséquilibre le raisonnement au profit d'une automatisation excessive. Dans ce cas, les élèves qui ont assimilé le matériel didactique et comprennent en principe les notions et les théorèmes, adoptent avant tout les formules. Ils résolvent facilement les problèmes-types, mais sont désorientés lorsque des situations nouvelles leur sont proposées, car ils n'ont pas de notions suffisamment actives de l'espace et des quantités. La formule remplace le bon sens.

Quant au « verbalisme », il consiste en une simple exécution des opérations et des constructions sans que l'on ait le souci de leur signification. L'élève se borne à citer des définitions et des propositions sans être capable de les interpréter dans chaque cas concret.

L'analyse du processus du raisonnement de l'élève et celui des causes et des conditions de ses déformations sont de la plus grande importance pour le professeur. En particulier, l'examen des erreurs commises par les enfants nous offre l'un des

---

(1) Nous remercions nos amis de *Mathematica et Paedagogia*, qui nous ont autorisé à reproduire cette étude dont l'auteur est une Collègue qui exerce à Cracovie (Pologne).

(2) B. Iwaszkiewicz : « Formalisme dans l'enseignement des Mathématiques ». *Matematyka*, Nr. 1, 1948, Warszawa, P.Z.W.S.

aspects de ce problème. Car une erreur essentielle qui se répète constamment et ne peut être due à une défaillance de la mémoire est le signal alarmant extérieur de ce qui se passe dans le cerveau de l'élève, et ne peut être négligée.

Mon article sera consacré à l'analyse des fautes les plus frappantes et les plus fréquentes commises par des élèves plutôt faibles, dans le domaine des transformations algébriques et à leur confrontation avec des erreurs commises par les professeurs dans leur enseignement. Je citerai tout d'abord quelques réponses typiques choisies parmi le grand nombre de celles que j'ai étudiées.

II. *LES REPONSES DES ELEVES ET LEUR ANALYSE.*

A. 1) « $-a(x+1) < b$, donc $x+1 > -\frac{b}{a}$; en divisant les deux membres de l'inégalité par un nombre négatif, je change le sens de l'inégalité. »

2) L'hypothèse « a est un nombre négatif » : l'élève note « $-a$ ».

3) $\sqrt{-\cos^2 x}$ n'a pas de sens, car sous le signe du radical il y a un nombre négatif.

B. 1) L'élève écrit « xy » pour représenter un nombre composé de deux chiffres (x le nombre des dizaines, y celui des unités).

2) L'élève substitue dans l'expression xy les valeurs $x = -3$, $y = -2$ et obtient $-3-2 = -5$.

C. 1) L'élève lit l'expression $x^2 + y^2$ comme le carré de la somme $x + y$.

2) « $\frac{\log x}{\log y} = \log x - \log y$, car le logarithme du rapport égale la différence des logarithmes. »

3) « $a^5 + 1 = a^2 . a^2 . a + 1$ » ; j'ai décomposé le polynôme en facteurs.

D. 1) Un élève résout une équation : « $x(2a + b + c) = a^2$; je dois d'abord ouvrir la parenthèse : $2ax + bx + cx = a^2$; il me *faut* placer les x d'un côté, ah ! elles sont du même côté ; il faut réduire les expressions semblables ; impossible ! donc je mets x en évidence : $x(2a + b + c) = a^2$. »

2) Un élève transforme un radical du second degré : « $\sqrt{a^3 . a^5} = \sqrt{a^3} . \sqrt{a^5}$; pour obtenir le radical du produit, il *faut* extraire séparément le radical de chaque facteur ; ... $a\sqrt{a} . a^2\sqrt{a} = a^3\sqrt{a^2} = a^4$; je transmets tout ce qui est possible avant le signe du radical, etc... »

3) En Septième, je procède à l'essai suivant : j'écris au tableau le produit $0{,}12 \times 0{,}3$ et je demande aux élèves d'effectuer mentalement ce calcul. J'aperçois qu'elles « écrivent » mentalement le produit 12×3 et « séparent » en imagination dans leur résultat trois places décimales. J'écris ensuite au tableau $\frac{12}{100} \times \frac{3}{10}$ et je demande de calculer le produit mentalement. Les élèves calculent « le produit du numérateur par le numérateur, etc... » comme si elles avaient obtenu un nouveau problème sans lien avec le précédent.

E. 1) en Neuvième, nous discutons la solution $x = \pm\sqrt{-b/a}$ de l'équation $ax^2 + b = 0$ et en particulier le cas trivial $x^2 = 0$. Puis nous demandons aux élèves s'il n'est pas possible de réduire la résolution de l'équation $x^2 + 6x + 9 = 0$ à celle de l'un des cas précédemment débattus. L'un des élèves écrit :

$$x^2 = -6x - 9 \; ; \; x = \pm\sqrt{-6x - 9}$$

et il est certain d'avoir résolu l'équation.

2) J'ai rencontré des élèves qui résolvaient l'inégalité $x^2 + 4 > 0$ de la sorte :

« $x^2 > -4$, $x > 2i$ ou $x < -2i$ » ; d'autres qui raisonnaient ainsi : « $x^2 > -4$; cette inégalité est insoluble, car les nombres négatifs n'ont pas de racines carrées. »

3) En résolvant une équation dont les coefficients sont fractionnaires, un élève constate : « On *peut* multiplier les deux membres de l'équation par le même nombre non nul. » Je lui demande ce que signifie ici « on peut ». Il répond : « L'équation n'en sera pas changée. » J'exprime un doute : « Comment cela ne changera-t-il pas ? Si tu procèdes à la multiplication, c'est pour que cela change ! Tu as ici deux équations : l'une a des coefficients fractionnaires, l'autre n'en a pas. » L'élève, abasourdi, se tait, il ne peut pas prendre conscience de ce qui « ne changera pas ». Pour mettre fin à cette discussion désagréable, il calcule rapidement et correctement, puis, avec un sentiment de libération, il écrit enfin la racine de l'équation.

F. 1) Un élève de Huitième calcule :

$$« -\frac{13}{3} - (-\frac{7}{3})^2 = -\frac{13}{3} + \frac{7^2}{3}$$

parce que moins et moins donnent plus ; si le signe moins précède la parenthèse, il *faut* supprimer la parenthèse et changer les signes à l'intérieur des parenthèses. »

2) Un élève de Dixième écrit : $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ et aussi

$$\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \sin 2\alpha$$

(« on doit simplifier la fraction »).

3) Un autre élève de la même classe écrit : $\sqrt[3]{\sin^3 x + \cos^3 x} = \sin x + \cos x$, car « on *peut* diviser par 3 les exposants du radical et de la puissance ». Après un moment de réflexion, il soupçonne avoir commis une faute et il dit : « On ne *doit* pas simplifier la somme de cette façon. » Nous lui demandons pourquoi « on ne doit pas le faire », mais il ne sait que répondre. Il se rappelle la définition du radical, mais ne sait pas l'utiliser.

4) En Septième, une élève calcule :

« $4(x + y) + 5(x - 2y) = 4x + 4y + 5x - 10y = 9x - 6y = 3xy$. »

Et elle explique : « Mon théorème énonce qu'il *faut* réduire la somme à la forme la plus simple. L'expression $9x - 6y$ n'est pas encore la plus simple puisqu'elle se compose de deux termes. » Après un instant de discussion, l'élève est d'avis qu'elle s'est trompée, car « il est défendu de réduire des termes dissemblables ». D'après son opinion spontanée, elle a mal agi, car « cela était faux », mais non pas parce que la proposition était inexacte.

Une analyse plus détaillée des réponses précitées (et d'autres que j'ai étudiées) nous conduit à des conclusions nombreuses et intéressantes. Le cadre de cet article ne me permet pas de les exposer toutes. Je me limiterai à quelques points importants du point de vue des résultats de l'enseignement et du développement de la pensée mathématique de l'élève.

Les malentendus dans la compréhension du symbole.

La base commune des fautes précitées semble consister dans le fait que les élèves plutôt faibles ne comprennent pas le symbole algébrique, qu'ils ne savent pas lire la notation symbolique et ne savent pas transcrire ce qu'ils expriment oralement.

Schémas sans contenu. — L'analyse des réponses des élèves suscite de graves incertitudes quant à la valeur éducative de l'enseignement de l'algèbre tel qu'il est donné à des élèves moyens. Leur savoir se borne à certains schémas de calcul assimilés d'une façon incorrecte. Dans aucun des cas cités, les élèves n'ont essayé de faire précéder le calcul de l'analyse qualitative de la situation. Ils ont entrepris un

calcul écrit sans réflexion préalable et ont procédé plus ou moins vite, soit correctement, soit d'une façon erronée, à des opérations mécaniques ; celles-ci leur sont dictées par l'algorithme qui est souvent choisi à l'aveuglette.

Par exemple, l'élève D1 transforme l'équation, puis elle revient à la forme primitive à l'aide d'une transformation inverse, sans s'apercevoir de l'absurdité de sa démarche ; elle applique un schéma de résolution stéréotypé.

L'élève D2, au lieu de procéder directement aux opérations dans leur suite annotée, complique les transformations en appliquant automatiquement des théorèmes sur les radicaux. L'exemple D3 nous permet d'observer le formalisme dans son inaptitude frappante. Le double calcul nous prouve le manque de liaison des signes et des notions.

Les élèves E1, 2, 3, appliquent sans réflexion des schémas de calcul dont ils se souviennent, mais n'ont plus conscience de leur signification. Ils ne saisissent pas le contenu réel de la situation présentée par une équation ou une inégalité. Les élèves F2, 3, 4, ne se rendent pas compte que les phrases énoncées doivent exprimer la vérité. Ils réduisent des groupes de signes, à « tout prix », à leur « forme la plus simple ». Le signe d'égalité placé entre des expressions écrites les unes à la suite des autres ne les gêne nullement.

Le développement erroné des réflexes aux stimulants visuels. — Tous les exemples cités, et F en particulier, illustrent le danger suscité par une réaction automatique et défectueuse à certains stimulants visuels. Voici quelques réactions typiques non contrôlées : la présence des parenthèses et du signe « moins » qui les précède, engage l'élève à les éliminer et à changer les signes des termes situés à l'intérieur d'elles — indépendamment de la fonction remplie par ces parenthèses dans l'ensemble de l'expression. La barre de fraction et la présence d'un numérateur et d'un dénominateur présentant des similitudes, engagent l'élève à supprimer la barre de fraction, indépendamment de la forme du numérateur et du dénominateur. Le même nombre figurant dans les exposants du radical et de la puissance placée sous le signe du radical engage l'élève à le supprimer sans analyser la structure de l'expression. Il est facile de citer beaucoup d'autres exemples semblables. Dans tout ceci, un élève plutôt faible ne saisit pas l'ensemble de l'expression. Un fragment de l'ensemble des signes qui le frappe de prime abord produit un réflexe rapide et se traduit par une simplification, l'omission de parenthèses et le changement des signes. L'élève ne se demande pas si ces démarches le conduiront à un résultat correct ou non ; aussi, dans bien des cas, le résultat correct n'est-il que l'effet du hasard.

En nous rendant tous les jours à notre travail, nous traversons la chaussée, par réflexe, toujours au même endroit, et nous tournons la tête, par réflexe, du côté d'où pourraient arriver des voitures. Ces deux réflexes associés conditionnent notre traversée et la rendent sans danger. Les démarches des élèves nous rappellent plutôt celles d'une personne qui ne disposerait que d'un seul réflexe, celui de l'engagement automatique sur la chaussée. Cette personne serait perpétuellement menacée d'être renversée par une voiture. De même, l'élève dont le réflexe unique se borne aux facteurs visuels est menacé d'erreurs.

Le code algébrique d'ordonnance et de défense. — En général, les élèves justifient les transformations algébriques auxquelles ils ont procédé en citant les prescriptions d'une espèce de « code algébrique » : « cela est défendu » ; « il faut procéder ainsi et non autrement ». Il serait vain d'espérer une explication de ces interdictions. Proviennent-elles d'un code ? Sont-elles le résultat de la fantaisie d'un mathématicien créateur de l'algèbre ? Nous voudrions entendre une seule réponse : « Il ne faut pas écrire ainsi, car cela ne serait pas vrai », ou « on ne peut pas transformer ainsi notre équation, car nous en obtiendrions une autre qui aurait des racines différentes de celle que l'on nous a donné à résoudre ». Hélas ! il est rare d'entendre ces réponses énoncées par des élèves. Un code formel de défenses et d'ordonnances a effacé dans leur esprit le sens de leurs actes. Il ne leur reste que « la lettre de la loi ».

III. *CERTAINES SOURCES DES ERREURS COMMISES PAR LES ELEVES EN ALGEBRE.*

Difficultés conceptuelles, techniques et psychologiques, liées à la symbolique algébrique.

L'histoire des sciences nous apprend que l'introduction du calcul symbolique en Mathématiques a modifié profondément leur développement. La voie qui y conduisit fut complexe. La représentation du nombre et de la variable au moyen de lettres de l'alphabet résulta de nombreuses expériences et d'essais d'amélioration des moyens qui exprimaient et fixaient les pensées mathématiques. Au cours des siècles précédents, des mathématiciens géniaux ne disposaient pas des instruments élémentaires de la pensée abstraite que l'on offre aujourd'hui aux élèves des écoles primaires et secondaires. Il est bon de s'en souvenir si l'on veut se rendre compte que la compréhension de la symbolique algébrique n'est guère facile pour l'élève et demande une élaboration méthodique, perspicace et très soignée.

1. Le passage du concret au symbole, des mots aux signes, constitue pour l'élève une difficulté fondamentale. De plus, nous devons tenir compte, en introduisant le calcul symbolique, des difficultés propres à ce nouveau langage. Nous les discuterons en détail :

1. En algèbre scolaire, nous utilisons souvent le même signe dans des significations différentes. Ainsi, le signe « — » est le symbole de la soustraction (par exemple la notation $8 - 2$ est lue « huit moins deux »), ou bien il est signe d'un nombre relatif (par exemple -2, « moins deux »), ou bien il est signe d'une opération que l'on pourrait appeler « création du nombre opposé au nombre donné » (par exemple $-(-2)$ que nous entendons comme « le nombre opposé au nombre -2 »).

Les propositions algébriques, et en particulier la relation entre l'addition et la soustraction des nombres relatifs et les conventions qui simplifient l'écriture de la somme algébrique, permettent fréquemment d'interpréter de deux façons le même ensemble de signes. Ainsi, le symbole « -2 » peut être interprété en tant que symbole d'un nombre négatif ou en tant que symbole d'un nombre opposé au nombre 2 ; l'expression $a - b$ détermine la somme du nombre « a » et du nombre « opposé à b», soit le résultat de la soustraction des nombres « a » et « b ». Pour les élèves débutants, la double ou triple signification des signes « — » et « + » peut être sujette à malentendu. Les fautes du type A 1, 2, 3, en sont la preuve.

Une autre source d'erreur provient du manque conventionnel de signe entre les symboles. Par exemple le symbole $2\ 1/2$ exprime la somme $2 + 1/2$ et la notation analogue $2a$ exprime le produit de 2 par a. Le signe 25 n'exprime pas le produit de 2 par 5, mais ab signifie le produit de a par b. Ces faits constituent une difficulté pour nos élèves. Les fautes du type B 1, 2, en sont la preuve ; elles sont le résultat d'un profond malentendu qui résulte de la confrontation formelle du symbolisme algébrique avec le système décimal de position.

2. La notation algébrique est reliée aux conventions qui ont trait à l'ordre de l'exécution des opérations. Ces conventions définissent la structure de l'expression algébrique qu'il faut avoir comprise pour pouvoir la lire et la nommer convenablement. Les fautes du type C 1, 2, 3, nous disent que les élèves ne coordonnent pas ces conventions et qu'ils lisent l'expression sans en avoir analysé la structure.

3. La représentation d'une variable par un symbole littéral est un problème difficile du point de vue scientifique et méthodologique. Que signifie pour un élève de Septième, par exemple, la lettre « a » dans le symbole $2a^4$? Désirons-nous qu'il la comprenne en tant que signe du nombre que nous n'aurions pas noté par un chiffre, ou bien cette lettre doit-elle toujours représenter pour l'élève une variable, un lieu vide, qu'on pourrait remplir par des « valeurs concrètes » ? Nous nous demandons si $2a$ doit être, pour le débutant, le symbole d'un nombre ou celui d'une fonction ?

Et comment nous devons interpréter, au début de l'enseignement de l'algèbre, les concepts de « monôme », de « polynôme » et de « fraction algébrique » ? Dans les classes inférieures, il est difficile de poser ces questions d'une façon tout à fait nette et de les présenter sous une forme logiquement irréprochable. De ce fait, les définitions de certaines notions fondamentales de l'algèbre scolaire ne sont pas, en général, des définitions rigoureusement mathématiques, mais le plus souvent, des descriptions plus ou moins intuitives dont peuvent découler certains malentendus. En particulier, on voit naître des difficultés quand apparaissent les paramètres dans les expressions algébriques. L'élève rencontre alors deux espèces de variables : en effet, le paramètre est une variable qui cesse de l'être au cours d'une partie du raisonnement. Il n'est pas facile, dans ce cas, de procéder méthodiquement du point de vue de la compréhension de l'élève et en même temps assez strictement du point de vue de la rigueur scientifique. Un des moyens formels qu'utilisent les manuels pour faciliter à l'élève cette distinction consiste à désigner les grandeurs variables par les lettres finales de l'alphabet et les grandeurs constantes par les lettres initiales. Ceci donne de mauvais résultats quand l'élève rencontre des équations et des fonctions en géométrie et en physique, parce que les inconnues y sont désignées par d'autres lettres, telles que h, v, d et c. L'élève ne reconnaît pas le trinôme du deuxième degré dans l'expression $s = Vt + 1/2\, gt^2$, car les lettres x et y n'y apparaissent pas.

4. Il est difficile de concilier l'automatisation et la prise de conscience. Si nous exigions de l'élève qu'à chaque transformation de son calcul algébrique il se rende compte totalement de la signification des symboles utilisés, nous ne pourrions pas lui apprendre à manier rapidement des algorithmes. Au cours d'une discussion sur le formalisme, un de nos mathématiciens éminents constata que le calcul automatique permet au mathématicien de reposer son esprit, qui est alors en mesure de s'attaquer d'une façon créatrice à de véritables problèmes. D'autre part, nous constatons souvent dans notre enseignement, qu'en raison même de cette exclusion momentanée de la conscience, l'élève commet des fautes flagrantes. Il ne se préoccupe pas des notions, mais de signes dépourvus de sens. Il jongle avec des symboles suivant des règles comprises formellement et poursuit des analogies extérieures ; des non-sens en résultent, telles les fautes E 1, 2 et F 1, 2, 3, etc... Le caractère formel du calcul algébrique facilite l'usage du calcul verbal dépourvu de réflexion. La mécanisation des activités a lieu, chez certains élèves, plus vite que leur compréhension. D'autres élèves procèdent tout d'abord d'une façon consciente, puis, en raison de l'automatisme établi, oublient ce qu'ils avaient compris, au point qu'il leur est très difficile de se rendre compte clairement du sens des symboles en jeu. Le danger consiste en ce qu'un élève peut très bien, au début de l'algèbre, transformer correctement les expressions tout en n'y comprenant rien ; dans la suite, sa connaissance purement mnémotechnique des règles de calcul craque sous le poids croissant des notions, des symboles et des théorèmes. C'est alors qu'apparaît au professeur le vide du cerveau de l'élève. Il en est frappé et il est porté à croire que l'élève a changé. En réalité, le maître ne s'est pas aperçu à temps du vide que dissimulaient des jongleries qui semblaient correctes.

Songeons aussi qu'il est psychologiquement difficile pour un élève de s'opposer à l'appel pressant et suggestif des signes opératoires que lui présente chaque expression algébrique. Dans bien des cas, l'élève considère qu'une expression est « dépourvue d'équilibre » tant qu'elle n'a pas acquis cette « bonne forme » appelée en algèbre scolaire « forme la plus simple », c'est-à-dire aussi longtemps qu'il s'y trouve un signe opératoire. Que d'efforts (exemple F 2, 3, 4) pour lutter avec les tendances à simplifier et à réduire, à tout prix, sans rapport avec le sens des opérations. Ainsi l'élève F 4 est inquiète de voir la somme $2x + 7y$, car il y a ici une addition « qu'il faut effectuer » ; par contre, le résultat $9xy$ ne l'inquiète guère, car l'appel à l'action ne s'y trouve pas (la multiplication ne possédant pas de signe). Les erreurs que nous avons observées ont leur logique, elles sont possibles du point de vue psychologique. La tendance à transformer les expressions algébriques de « l'équilibre instable » à

une « bonne forme » explique la fréquence de certaines fautes (qui ont d'ailleurs d'autres et nombreuses raisons). L'élève faible n'écrira jamais $\sqrt{a^2+b^2}=\frac{a}{b}$, mais il écrira souvent $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$; il n'écrira pas $3x+5y=3x-5y$, mais souvent $3x+5y=8xy$. J'ai observé des élèves qui déposaient leurs plumes dans l'attitude d'un devoir bien accompli lorsqu'à la suite de plusieurs erreurs commises pendant les transformations, tout « se réduisait à zéro ». « L'équilibre » de leur expression algébrique était complet ; « la forme la plus simple » obtenue ! Ces élèves ne se souciaient nullement du contenu du problème.

L'ENSEIGNEMENT « FACILITÉ FORMELLEMENT ». — On peut trouver la cause de certains erreurs de calcul algébrique dans l'attitude du maître dont l'enseignement est « facilité formellement ». Cet enseignement se caractérise par : 1° la non-évaluation de certaines difficultés éprouvées par les élèves ; 2° l'attitude des maîtres qui aperçoivent ces difficultés, mais les écartent au lieu de les combattre ; 3° leur désir de faciliter momentanément l'enseignement aux élèves, facilité superficielle qui permet de glisser à la surface sans atteindre au fond des choses ; 4° le désir d'atteindre rapidement des résultats spectaculaires, un manque de souci éducatif.

Le but de l'enseignement consiste à alléger la peine des élèves. Pourtant, si l'on veut réellement leur faciliter la compréhension de la vérité, il faut, dans bien des cas, leur rendre l'étude plus difficile. L'élève apprend plus rapidement qu'il ne comprend, devine plus vite qu'il ne raisonne. Il ne se rend pas compte réellement de ce que signifie « comprendre » et identifie la compréhension à la mémoire. Le maître doit faire apparaître le problème aux élèves qui ne le voient pas encore et compliquer apparemment ce qui semble très simple et ne l'est pas en réalité. Sa tâche consiste à rendre inquiet le cerveau de l'enfant, à le faire douter si c'est nécessaire. S'il ne le fait pas, il se borne à une assimilation toute extérieure et ouvre la voie au verbalisme dans la pensée.

Le cadre de cet article ne me permet pas de rendre compte en détail des erreurs méthodologiques commises au cours des leçons auxquelles j'ai assisté. Ces leçons étaient « facilitées formellement » ; on y observait sur le vif la genèse des fautes futures — le verbalisme et le formalisme *in statu nascendi*. En voici quelques exemples frappants :

1. *Contrôle inexact du processus psychique de l'élève ;* une trop brève analyse du degré d'assimilation du matériel, le manque de distinction entre la rétention dans la mémoire et la compréhension.

2. *Asservissement prématuré aux règles, qui diminue l'activité de la pensée créatrice de l'élève.*

Les théorèmes de l'algèbre sont souvent exprimés sous forme de règles génétiques de laboratoire ; pour augmenter leur « opérativité », on leur donne la forme d'ordonnances, de défenses et de permissions. « L'opérativité » ne s'obtient souvent qu'au prix fort dangereux du formalisme. L'énoncé : « Si les deux membres de l'équation sont multipliés par le même facteur différent de zéro, on obtient une équation qui a les mêmes racines que l'équation donnée », est moins opératif que celui-ci : « Il est permis de multiplier les deux membres de l'équation par le même facteur différent de zéro. » Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, l'emploi de règles telles que cette dernière supprime dans l'esprit de l'élève la compréhension du terme « il est permis ». La tendance à « l'opérativité » à tout prix conduit à enseigner des règles incorrectes dont voici des exemples : « Pour multiplier une somme par un nombre, *il faut* multiplier chacun de ses termes par ce nombre et additionner les produits obtenus » ; « pour extraire la racine d'un produit, *il est nécessaire* d'extraire séparément la racine de chacun des facteurs » ; « le logarithme d'un produit s'obtient en additionnant les logarithmes de chacun des facteurs ». Ces règles

ne sont pas correctes. Pour multiplier la somme $(2+3)$ par le nombre 7, on peut multiplier chaque terme par le nombre 7 et calculer $7.2+7.3$, mais ce n'est pas nécessaire, car on peut opérer autrement : $7.5=35$. Pour calculer $\sqrt{a^5.a^8}$, on peut extraire le radical de chaque facteur, mais cela n'est pas nécessaire, car on peut calculer plus simplement : $\sqrt{a^8}=a^4$. L'emploi des tables (selon la règle citée) pour calculer $\log(0{,}2\times 5)$ serait ici preuve d'inaptitude. En suggérant une voie unique, les préceptes opératifs, mis sous forme d'ordonnances rigoureuses, excluent le choix conscient et réfléchi d'une méthode de résolution. Je crois que dans les cas où la règle opérative fixe une façon d'agir parmi d'autres également correctes, il est nécessaire de le signaler par une phrase. A l'aide d'une directive générale, nous pourrons aider les élèves à comprendre l'expression « on peut » en reliant « les lois formelles » aux conventions qui se rapportent à la succession des opérations. Par exemple : « Les propositions algébriques permettent parfois d'abandonner ces conventions, car certains théorèmes nous garantissent le même résultat malgré le changement d'ordre des opérations. Veux-tu changer la succession des opérations indiquée dans la notation ; attention ! réfléchis, en as-tu le droit, et est-ce que cela en vaut la peine ? »

3. *Manque de liaison convenable des théorèmes algébriques avec les propriétés arithmétiques déjà connues.*

L'algèbre scolaire n'est pas une théorie polyvalente. Ses symboles ont pour l'élève une interprétation unique. Ils représentent les nombres, les variables, soit aussi des fonctions numériques définies dans l'ensemble des nombres. « Les lois des transformations » sont des théorèmes concernant les nombres et les fonctions numériques. La compréhension de ces théorèmes est conditionnée par une exposition « correcte des lois formelles » lors de l'enseignement de l'arithmétique.

Ainsi, pour un enfant auquel on a enseigné l'arithmétique méthodiquement, la proposition $ab=ba$ possède un sens concret. Les deux facteurs ont pour lui une signification différente et la notion de produit se relie à une action concrète. Disposer des livres par dizaines sur six rayons n'est pas la même chose que disposer des livres par six sur dix rayons. L'égalité $6.10=10.6$ exprime donc pour l'enfant un fait réel. Pour calculer $2.3=3+3$, l'enfant agit différemment que pour calculer $3.2=2+2+2$, et l'égalité $2.3=3.2$ rend possible la diversité du choix. Le produit $\frac{4}{7}.\frac{2}{3}$ exprime $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{3}$ et le produit $\frac{2}{3}.\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{7}$. L'égalité $\frac{4}{7}.\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.\frac{4}{7}$ n'est une proposition ni banale, ni évidente. Elle introduit une propriété inattendue, celle des fractions-opérateurs. La loi $ab=ba$, ainsi que les autres « lois formelles » ne doivent pas être pour l'enfant uniquement formelles. L'enseignement « formellement facilité » néglige cet aspect et engendre le futur verbalisme en algèbre.

4. *Usage inconsidéré de l'analogie par le professeur.*

L'analogie est une source de découvertes, d'idées nouvelles et de généralisations. Le sens de l'analogie rend possibles la synthèse de divers domaines scientifiques et le transfert de méthodes connues, d'une discipline à une autre.

L'analogie peut et doit jouer un rôle important dans l'enseignement des Mathématiques. Le sens de l'analogie stimule la pensée. Cependant une argumentation basée sur l'analogie ne peut conduire qu'à l'énoncé d'hypothèses qui doivent être ensuite vérifiées par un raisonnement rigoureux. La nécessité de cette vérification ne paraît guère évidente à l'élève débutant, dont l'esprit n'est pas encore critique. Il est porté à généraliser trop hâtivement. Par exemple, étant donné que le produit d'une somme par un nombre égale la somme des produits et que la mesure de la somme de plusieurs segments égale la somme de leurs mesures, l'élève est enclin à conclure que « le logarithme de la somme égale la somme des logarithmes ». De même, étant donné que plusieurs propriétés des radicaux ressemblent formellement aux propriétés des puissances, l'élève est enclin à penser que toutes les transformations des radi-

caux peuvent être effectuées comme celles des puissances. Souvent aussi, l'élève écrit $\sqrt[3]{a}.\sqrt[5]{a} = \sqrt{a}$, bien qu'il ait étudié le théorème sur le produit des radicaux. Dans ce cas, l'analogie agit plus fortement sur l'imagination de l'élève que le théorème démontré précédemment. L'utilisation du principe d'analogie dans l'enseignement de l'algèbre exige donc une extrême prudence.

5. *Contrôle non rigoureux des réactions provoquées par les stimulants visuels.*

6. *Importance excessive accordée au calcul écrit et sous-estimation du calcul mental et des spéculations qualitatives.*

De nombreux professeurs accordent au calcul écrit une trop grande valeur, en raison de sa fonction « d'exerciseur », et oublient que le calcul mental suscite des démarches intellectuelles autrement importantes que celles qui accompagnent le calcul écrit automatique. L'élève privé totalement ou partiellement de la possibilité d'écrire est dépourvu des associations liées directement aux stimulants visuels. Il est forcé de pénétrer plus profondément dans la question et de prendre conscience clairement des notions qu'il utilise. Cette nouvelle situation éveille son activité, mobilise les dispositions psychiques qui, autrement, demeuraient inactives. En obligeant l'élève à calculer mentalement la différence de deux nombres relatifs, de calculer sans table $10^{\log 5} + 10^{\log 3}$, de résoudre « sans calcul » le système de deux équations $x+y=5$ et $2x + 2y = 10$, ou l'inégalité $\sin x + \cos y > 2$, nous approfondissons et fixons les notions de différence, racine du système d'équations, racine de l'inégalité, logarithme, $\sin x$, $\cos x$ et parallèlement nous contrôlons si elles ont été assimilées correctement. Le calcul mental et les résolutions « qualitatives » de problèmes forment le contrepoids des réflexes conditionnés aux stimulants visuels qui sont le résultat d'un manque de vigilance du maître.

Dans le même ordre d'idées, il faudrait aussi réviser certaines recettes telles que « nous ajoutons des zéros », « nous simplifions », « nous supprimons les parenthèses », etc...

Le calcul écrit formel est une acquisition importante sans laquelle la Mathématique n'aurait pu atteindre son niveau actuel. Il faut donc la rendre assimilable par les élèves et la construire sur des notions fortement établies, et non dans le vide.

7. *Blocus des occasions d'erreur.*

Cette ruse didactique consiste dans le choix, par le professeur conscient des difficultés de l'élève, de voies de raisonnement où l'occasion de commettre des erreurs soit minime. Certains manuels nous en offrent des exemples. Les exercices sont groupés systématiquement suivant certains modèles ; les instructions sont tellement suggestives qu'il est bien difficile, même pour un élève très faible, de commettre une erreur. Un tel blocus d'erreurs ne donne qu'apparemment des résultats positifs. Ce qui était obscur dans le cerveau de l'enfant demeure obscur encore, bien que le signal-erreur n'ait pas eu lieu. Cette façon de procéder donne des illusions aux professeurs et aux élèves, et le premier pas sur la voie du verbalisme est franchi, l'omission des difficultés n'étant pas équivalente à la victoire remportée sur elles.

8. *Négligences concernant l'élaboration des méthodes d'autocontrôle des élèves.*

Il s'agit en particulier du fait que le professeur attribue trop peu d'importance aux différents procédés de contrôle des résultats, contrôle exact ou taxatif, contrôle au moyen d'une interprétation concrète, etc... N'oublions pas que la vérification au cours de laquelle on renverse certaines situations et on remplace certaines opérations par leurs inverses, possède une grande importance dans l'acquisition des notions. Par exemple, à la suite d'un calcul formel, l'élève vérifie une équation. Au cours du calcul, il n'a pas réfléchi à ce que sont l'équation et ses racines. En la vérifiant, il doit en prendre conscience ; de même, en vérifiant le résultat d'une soustraction, il pense à la définition de la différence et en vérifiant le résultat de la division, à celle du quo-

tient. La vérification peut être aussi un moyen de rendre l'élève conscient de la source de son erreur. Réfléchissons, par exemple, à la faute $\sqrt[3]{\sin^3 x + \cos^3 x} = \sin x + \cos x$. J'ai observé dans la pratique scolaire différentes façons de rectifier cette erreur : 1) le maître demande à un autre élève de la corriger ; 2) il exige que l'élève cite la loi qui justifie la transformation ; 3) il démontre à l'élève que l'égalité notée est fausse, par exemple, pour $x = \pi/4$; 4) il demande à l'élève de vérifier si

$$\sqrt[3]{\sin^3 x + \cos^3 x}$$

égale l'expression $\sin x + \cos x$ en se rapportant à la définition du radical. Ces démarches ne sont pas toutes de même valeur. Le premier cas est de moindre valeur pour l'élève qui a commis la faute. Dans le second cas, l'élève ne retrouvant pas la recette adéquate, se persuade qu'il a agi « illégalement », mais il n'apprend rien du tout sur sa faute. La troisième démarche est une vérification par contre-exemple. L'élève établit que l'égalité est fausse, mais ne voit pas pourquoi elle l'est. Par contre, dans le quatrième cas, le maître amène l'élève à constater sa faute et à en comprendre la cause précise ; l'élève approfondit et fixe les notions de radical et de puissance et de relation qui les lie. Il me semble qu'à l'occasion de chaque leçon d'algèbre, nous pouvons trouver l'occasion d'une vérification qui soit réellement éducative. Pour atteindre ce but, il faut évidemment sortir des cadres de l'enseignement « facilité formellement ».

En écrivant cet article, je n'avais pas l'intention de développer le thème complètement, ce qui demanderait des recherches encore plus approfondies. Il me semble qu'il est important de les poursuivre parce que notre vigilance ne peut jamais s'endormir si le développement de l'intelligence de la jeunesse est en jeu.

Zofia KRYGOWSKA, *Cracovie.*

QUELQUES POINTS DE PÉDAGOGIE THÉORIQUE

Voici de menues remarques sur les Mathématiques de Seconde, Première et Sciences Expérimentales consécutives à diverses expériences auxquelles je me suis livré au cours des dernières années :

1) ALGÈBRE MODERNE ET LOGIQUE.

Une expérience que j'ai tentée l'an passé en Seconde montre qu'un enseignement systématique de l'Algèbre *à partir* de l'Algèbre moderne est trop dogmatique et n'est réellement accessible qu'à deux ou trois très bons élèves. D'autre part, s'il attire l'attention sur les mécanismes et les règles de calcul, il n'a pas d'influence bénéfique sur la pratique du calcul dans le domaine réel. Cependant, tel quel, il intéresse les élèves et la simplicité des structures algébriques, tant que n'intervient pas la continuité, leur donne le sentiment de mieux posséder le cours (1). Le calcul matriciel, donné en application, sur des matrices 2×2 avec prolongement sur les nombres complexes présentés comme corps des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est facilement pratiqué (d'ailleurs aux U.S.A. les nombres complexes figurent dans les programmes d'algèbre élémentaire). Il y aurait donc, à mon avis, un moyen-terme à trouver, consistant à construire la théorie des nombres réels sur la mesure des vecteurs portés par un axe, image indispensable pour les questions d'ordre, de continuité, de valeurs

(1) Je me fonde ici sur leurs propres appréciations.

absolues, etc... ; mais on pourrait ensuite mettre en évidence les axiomes sur lesquels reposent les règles de calcul et traiter en exercices des exemples divers : congruences modulo n, matrices carrées, nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$ par exemple (a et b rationnels donnent un corps, a et b entiers donnent un anneau dont l'étude du groupe multiplicatif des éléments unitaires est intéressante), sans oublier les espaces vectoriels. Il est difficile de dissocier, avec des coefficients pris dans le domaine réel, ou même dans un corps infini quelconque, la notion de forme polynômiale de celle de fonction polynômiale, puisqu'il n'arrive jamais que deux formes différentes soient associées à la même fonction ; il paraîtra donc bien artificiel de « définir » la somme de deux polynômes ou leur produit qui, pour les élèves, doit être l'unique forme susceptible, à leurs yeux, de représenter la somme ou le produit des deux fonctions. Mais on aurait intérêt à insister plus qu'on ne fait, semble-t-il, sur le quotient de deux polynômes et sur leur division suivant les puissances décroissantes. A propos des fractions rationnelles on pourrait alors mettre en évidence la distinction entre forme et fonction ; on n'hésitera pas à écrire $\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ en remarquant qu'il ne s'agit pas d'une stricte égalité entre les fonctions associées, ce qui nécessitera des précautions dans les résolutions d'équations.

Quel que soit le degré de pénétration dans l'étude des structures, il sera en tout cas utile d'éliminer des démonstrations absurdes comme celle-ci, extraite d'un manuel en usage et que des Collègues reconnaîtront peut-être : pour prouver que

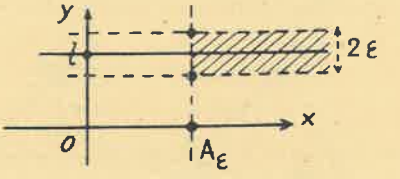
$$a = b \Longrightarrow a + c = b + c,$$ on procède aussi

$$a = b \Longrightarrow a - b = 0 \Longrightarrow (a + c) - (b + c) = 0 \Longrightarrow a + c = b + c,$$

comme si la définition de l'addition n'entraînait pas, *ipso facto*

$$a = b \text{ et } c = d \Longrightarrow a + c = b + d.$$

Dans le domaine de la logique l'usage des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ devrait être répandu et même imposé. En ce qui concerne les questions de limites infinies, qu'il est difficile d'éluder en Première et Sciences Expérimentales à propos des fonctions, j'ai constaté qu'il faut, ou bien se contenter d'inscrire les symboles $\pm\infty$ dans les tableaux sans les définir autrement que par des allusions intuitives, ou bien utiliser $\exists$ et A. J'ai constaté que des élèves assez médiocres peuvent reconstituer la phrase en « péanien » (comme disait Poincaré), alors que les meilleurs trébuchent sur l'interminable phrase du langage courant. Il ne m'a pas paru mauvais d'associer l'idée de « souricière » ou piège à courbe à celle de limite, sur le plan graphique.



Si $y \to l$ quand $x \to +\infty$ on peut enfermer la courbe dans un couloir aussi étroit qu'on veut autour de $y = l$ pourvu que x soit assez grand.

De telles leçons demeurent assez difficiles et fastidieuses, mais entièrement compréhensibles et constituent un exercice de précision des idées, sous le contrôle impitoyable du symbolisme logique. On n'a plus le droit de répéter de nos jours que les traductions latines ont une vertu irremplaçable pour la formation de l'esprit quand il existe un langage autrement logique et synthétique que le latin, lequel signifie par la même phrase que les Romains seront vainqueurs et vaincus (*dico romanos vincere posse*).

Le quantificateur $\forall$, permet, entre mille avantages, d'éliminer l'usage douteux des identités dans la définition des fonctions paires, périodiques, etc...

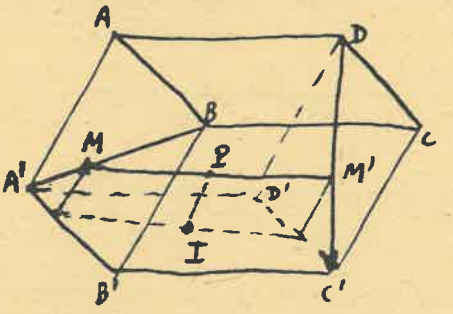
2) Etude des fonctions.

Les valeurs absolues, qui surprennent toujours les élèves, fournissent des sujets d'exercices nombreux exploités par les manuels. Il y a un thème que je n'ai pas encore vu et qui est intéressant. On pourrait le baptiser, pour être à la mode, « la fusée à plusieurs étages » : c'est celui qu'emploie Lebesgue, dans sa démonstration du théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues (2). Il est basé sur le fait simple que la fonction $f(x) + |f(x)|$ est nulle quand $f(x)$ est négative et égale à $2f(x)$, quand $f(x)$ est positive. On peut ainsi fabriquer des fonctions assez extravagantes avec des moyens très simples et notamment des fonctions représentées par telle ligne brisée qu'on s'est fixée d'avance. Il suffit de partir avec une fonction linéaire sur le premier côté, puis d'ajouter à chaque sommet la fonction linéaire convenable, « neutralisée » jusqu'alors par le procédé du $f(x) + |f(x)|$ qui vaut zéro tant que $f(x)$ est négative : d'où la comparaison avec une fusée à plusieurs étages. Le dernier de nos élèves de Seconde peut s'amuser à ce jeu inoffensif.

Pour en rester à ce domaine il est intéressant d'initier les élèves à une topologie des fonctions, à cette occasion ou à une autre. La ligne brisée inscrite dans telle parabole ou hyperbole, on évalue aisément, dans un intervalle (a, b) le maximum de la différence des ordonnées qui est une « distance », sur (a, b), entre les deux fonctions.

3) Géométrie dans l'espace.

L'équilibre et la cohérence du cours de Première me paraissent gagner à une division nette entre géométrie linéaire et géométrie métrique. Il est possible de consacrer le premier trimestre à l'ensemble des questions linéaires : parallélisme (3), théorèmes de Thalès, vecteurs, translation, symétrie par rapport à un point, homothétie, projection cylindrique (j'ai eu déjà l'occasion de dire dans cette revue combien il me paraît nécessaire de ne pas se limiter à la projection orthogonale, ce qui n'augmente pas d'une ligne la longueur du cours) ; le plus tôt possible il est bon d'étudier des solides et notamment le parallélépipède quelconque qui, complaisamment, fournit tous les sujets d'exercices imaginables sur les questions énumérées et offre le considérable avantage de soulager l'imagination et le langage avec son plancher, son plafond et ses murs. Un problème comme celui du lieu des milieux des segments de droites parallèles à un plan et s'appuyant sur deux droites non coplanaires se résout bien facilement sur le parallélépipède ci-contre, en projetant le segment variable MM' sur le plan « horizontal » parallèlement à AA'.



(2) Cf., par exemple, Goursat : *Analyse*, t. II, p. 408.

(3) A propos duquel le parallélisme au sens large (voir article de M. Crozes, n° 177, page 490) me paraît d'un usage indispensable même à propos des droites et plans. Faute de s'en servir, on énonce des théorèmes faux (deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles, par exemple).

Lassé du parallélépipède on pourra en tirer, comme un lapin d'un chapeau, des tétraèdres divers et un bel octaèdre centré. Il n'est pas jusqu'à la toile d'araignée du paraboloïde hyperbolique qui ne s'y dissimule à l'usage des élèves les mieux doués.

Ayant ainsi travaillé pendant un trimestre sur une géométrie relativement pauvre en théorèmes, mais non en figures, on peut aborder au deuxième trimestre l'ensemble des questions métriques. A la fin de cette deuxième étape se posera la question des symétries par rapport à la droite et au plan. Le programme prescrit des définitions qui ne peuvent que demeurer inutilisables si on ne va pas plus loin. Or la question des déplacements dans l'espace est trop complexe pour être étudiée en Première. Je propose la méthode suivante : définir les isométries sans s'attacher à distinguer le sous-groupe des déplacements ; montrer dans le cas général qu'une isométrie transforme une droite en droite, un plan en plan et conserve les angles (par exemple, la droite AB est le lieu des M tels que $|MA \pm MB| = AB$) ; puis montrer que la symétrie par rapport à un plan est une isométrie et la symétrie par rapport à une droite, le produit de deux symétries du type précédent. On peut y ajouter une initiation « physique » aux déplacements grâce à l'observateur embroché, admettre que la symétrie par rapport à un plan change les sens des trièdres et examiner, d'après le nombre de symétries planes qui entrent dans leur composition, la nature des autres isométries étudiées.

4) Primitives en Sciences Expérimentales.

Il me semblerait intéressant de dissocier l'idée d'intégrale définie de celle de surface, de même qu'on considère en Première la pente de la tangente comme une image géométrique de la dérivée, mais non comme sa définition. Le cours de Mathématiques de Sciences Expérimentales est tourné vers la Physique ; celle-ci utilise les intégrales de façon plus ou moins occulte dans le calcul du travail de la pesanteur, des forces de la vapeur, du courant électrique, etc... Ramener tout à des surfaces au lieu de montrer comment on est obligé de calculer une intégrale définie à la place d'un simple produit chaque fois qu'un des facteurs du produit est fluctuant, me paraît passer à côté d'une belle occasion de culture mathématique. Il me semble d'ailleurs qu'une étude des fonctions en escalier avec application à des statistiques et calculs de moyenne serait la meilleure introduction possible au calcul intégral en Sciences Expérimentales. C'est cette méthode qui permet à Arnaud Denjoy de donner un exposé intuitif lumineux d'une question bien difficile, celle de l'intégrale de Lebesgue (cf. *L'Encyclopédie française*, 1, 70, 13). L'aspect valeur moyenne, c'est-à-dire $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, est le plus intéressant à mon avis à introduire en premier lieu. Mais il faut parier que les surfaces auront la vie dure.

J'espère que ces remarques intéresseront quelques Collègues, notamment débutants et que je bénéficierai en retour de suggestions sur l'enseignement dans les classes du deuxième cycle, suggestions qui me paraissent plutôt rares dans ce *Bulletin*, alors que le fond de notre enseignement a sérieusement besoin d'un renouvellement auquel les manuels actuels n'apportent pas encore de solutions, les objectifs commerciaux des éditeurs s'y opposant d'ailleurs fatalement. Il est regrettable que beaucoup de Collègues conservent pour leur usage personnel le fruit de leurs recherches, par négligence ou excessive modestie.

Jacques Weil (*Ecole Normale, Carcassonne*).

TROIS POINTS DE VUE D'UTILISATEURS.

Apprendre les mathématiques, cela participe à la formation de l'esprit, nul ne le nie. On pense même si souvent à cet aspect de notre enseignement qu'on oublie parfois qu'il a aussi une utilité pratique (comme si former l'esprit ce n'en était pas déjà une...). Trois scientifiques qui opèrent dans des domaines très différents nous donnent leur point de vue sur cette utilisation des connaissances mathématiques.

MATHÉMATIQUES UTILES AU NATURALISTE ET AU GÉOGRAPHE

Lors d'une rencontre commune entre mathématiciens et naturalistes, en 1956, M. WALUSINSKI m'a prié de porter à la connaissance de nos Collègues quelques observations sur les Mathématiques qui peuvent être utiles aux naturalistes et aux géographes des années 1958 à 1980 ou 1990.

La question qui se pose est la suivante : Etant donné un certain état, existant en 1958, ou prévisible, pour les années 1960-1990, de la société et de l'économie en France, et des besoins des laboratoires, des instituts de recherche, des universités et de l'industrie, quelles sont les parties des Mathématiques qui, enseignées aux jeunes gens de 12 à 18 ans principalement, pourront plus tard être le plus utiles à ceux d'entre eux qui se dirigeront vers les sciences naturelles et vers la géographie ?

Les éléments de ma réponse seront tirés surtout de trois sources :

a) Pratique de la recherche géologique et géographique, depuis 1934. Contacts avec de nombreux chercheurs français et étrangers.

b) Enseignement dans les Lycées, en sciences naturelles (1934-1956), physique (1934-1937) et mathématiques en Sixième-Cinquième (1934-1936).

c) Enseignement supérieur, troisième cycle, dans ma spécialité, en sédimentologie et géographie physique, à Paris (1956-...) et dans diverses Universités d'Allemagne, Suède, Pays-Bas, Belgique, Brésil, Etats-Unis et Canada (1949-...).

En France, et dans tous les pays cités, presque sans exception, tous les professeurs d'Enseignement Supérieur, et tous les chercheurs scientifiques, dans les sciences naturelles et en géographie, constatent, dans la formation reçue entre 12 et 18 ans, des lacunes très graves, qui pèsent très lourdement sur le rendement des chercheurs, et dont il est émouvant d'entendre, même des hommes à cheveux gris, vous faire l'aveu. Ces lacunes portent surtout sur la connaissance des langues vivantes (sauf aux Pays-Bas) et ensuite, quoique à un moindre degré, sur les Mathématiques (sauf pour la statistique, bien étudiée, aux Etats-Unis). Elles entraînent, dans les recherches pures ou appliquées, des retards qu'on peut évaluer à un à trois ans, pour un chercheur moyen, et un abaissement de la somme de résultats qu'on peut attendre de son travail, abaissement très difficile à évaluer, mais qui, par comparaison avec les rares chercheurs mieux formés, peut être évalué à la proportion de deux ou trois à un, et parfois de dix à un. C'est dire que la mauvaise préparation des chercheurs cause à la société un préjudice très grave, et que nous devons chercher à y remédier, dans nos classes.

Les lignes qui vont suivre, sont un témoignage à corriger par d'autres ; bien qu'elles ne prétendent en rien proposer un programme, elles pourront être lues tout de même dans la perspective d'une réforme, mais d'une réforme vraie, c'est-à-dire telle que savent en promouvoir nos Collègues, vrais professeurs, et non pas, bien entendu, de ces redécoupages confus, dans des locaux trop petits, par lesquels, sous le nom fallacieux de réforme de l'Enseignement, des gens, sans contact direct avec les élèves, égarent l'opinion.

Si une réforme vraie des Mathématiques pour les jeunes de 12 à 18 ans (et aussi

pour ceux de 6 à 12 ans, où elle serait au moins aussi importante) s'impose aux yeux de beaucoup, certains feront remarquer qu'elle ne saurait être faite en vue du mieux d'une seule spécialité, telle que les sciences naturelles ou géographiques. Ceci est l'évidence même. Toutefois, une autre évidence est qu'au cours des temps, tout va se subdivisant et se spécialisant de plus en plus et de plus en plus vite : professions, recherches, Enseignement Supérieur même. Dès lors, dans les Mathématiques à enseigner aux jeunes, on doit distinguer deux parts : l'une, commune, comprenant les bases essentielles, nécessaires à tous, et formatrices pour tous, et l'autre, différente suivant les professions futures : médecine, art de l'ingénieur, économie et sociologie, etc... Mes Collègues mathématiciens sont mieux placés que personne pour distinguer ces deux parts, dans le témoignage forcément limité qui suit. Qu'ils veuillent bien en excuser la forme paradoxale et souvent excessive. Pour être franc, il fallait schématiser : il sauront apporter la modération nécessaire.

I. — Ce qui ne nous a jamais servi

Presque toutes les Mathématiques de Spéciales de 1927. La géométrie descriptive. Les coniques. La géométrie en général (sauf les premiers livres vus vers 12 ou 13 ans, et qui sont très formateurs). La géométrie dans l'espace et en particulier les chinoiseries sur les droites et plan perpendiculaires (mais les symétries sont utiles).

L'algèbre, sauf les équations du premier degré. L'équation du second degré ne nous a jamais servi, nos problèmes sont si simples ! La grosse question, en algèbre, n'est pas de résoudre les équations (encore moins de les discuter), mais bien de mettre un problème en équation, et un problème réel.

Ceci, me dira-t-on, regarde le physicien, ou le naturaliste. Mais le mathématicien ne pourrait-il pas nous y aider ? Partir d'un fait réel, d'une donnée réelle, et montrer comment on y pique une formule, une équation, n'est-ce pas aussi de la Mathématique ? En tout cas, toute la Mathématique du naturaliste ou du géographe est là.

Le principe du calcul différentiel et intégral est indispensable, mais, ici encore, il s'agit de l'appliquer. Les seules fonctions utiles sont : linéaire, deuxième degré à la rigueur, trigonométriques et surtout exponentielle. Toutes les intégrations chinoises, dont je me faisais une sorte de jeu en classe de Mathématiques Spéciales, ne nous ont jamais servi à rien, ni à moi, ni à mes amis ; il y a là un gros effort de mémoire tout à fait inutile.

En trigonométrie, $\sin 2x$ et autres, et tout ce qui dépasse les définitions et les relations fondamentales, paraît du temps perdu. Si, par extraordinaire, on a, une fois dans sa vie, besoin de la formule, on la cherche dans un livre ou on la demande à un ami mathématicien. Ceci vaut aussi pour les intégrales.

En arithmétique élémentaire, pour enfants de 6 à 12 ans, j'admets l'addition et la soustraction. La multiplication et la division, je les fais à la règle à calculs, ou au cercle à calculs : c'est beaucoup plus sûr, les erreurs que je risque sont faibles, et bien inférieures à la précision des données. Si, par extraordinaire, j'ai besoin d'une précision plus forte, ma table de logarithmes est là. La pensée du temps perdu, par les enfants de 7 à 11 ans, à faire des divisions, est l'un de mes plus grands soucis : 10 % du temps de notre jeunesse est gâché pour une opération périmée, sans utilité pratique, et sans rôle formateur. Soyons modérés : accordons les divisions de deux chiffres : 24 par 8, 60 par 7, oui, cela peut servir. Je conserverais aussi la table de multiplication étendue à 12, et les divisions correspondantes.

La racine carrée ne m'a jamais servi. Quand j'en ai besoin, je la prends dans une table. Sur 20 chercheurs de nos disciplines, on n'en trouverait pas plus d'un ou deux qui sachent encore l'extraire : cette situation, nos Collègues mathématiciens la connaissent et la comprennent très bien. Mais alors, pourquoi en faire une *preuve* redoutable, pour les enfants de 11 à 13 ans, au lieu de lui laisser son vrai rôle, qui

est celui d'un *apprentissage*. C'est comprendre le mécanisme d'extraction qui est intéressant, je pense, et non le posséder.

De tout ce que je viens d'énoncer, en gros, il ressort que la moitié au moins du temps consacré aux Mathématiques pourrait être mieux employé, pour les jeunes gens de 12 à 18 ans, mais aussi pour ceux de 6 à 12 ans, pour lesquels une réforme me semble au moins aussi indispensable.

Le temps ainsi libéré pourra être affecté à des exercices, ou à des chapitres, plus utiles, mais il ne suffira pas, et l'horaire des Mathématiques devra être augmenté et des exercices pratiques devront être institués, comme je vais maintenant le montrer.

II. — On en redemande

A. *Forme.* — Quatre étudiants sur cinq ne savent pas écrire des chiffres lisibles ; leurs tableaux de valeurs numériques sont incompréhensibles, avec oubli de libellés, ou d'unités, ou chiffres non alignés en colonnes. Chez les chercheurs avancés, candidats au doctorat, chez le signataire de ces lignes, environ 5 % des mesures ou relevés sont inutilisables pour fautes ou manques du genre précédent, et 30 % du temps de la recherche est affecté à réparer des erreurs ou à combler des lacunes de cet ordre, ou concernant l'étiquetage. Il s'agit ici d'habitudes d'ordre élémentaires, qui devraient être acquises dès l'âge de 10 ans environ, et maintenues entre 12 et 18 ans. Pour les faire acquérir, les professeurs de géographie et de sciences peuvent jouer un rôle, mais que peuvent-ils, si le mathématicien ne les soutient, ne donne l'exemple, n'est le premier à exiger ? Je résume : nous voulons des chiffres lisibles, alignés horizontalement et verticalement ; en colonnes, avec en-têtes. Des travaux pratiques sont indispensables.

B. *Principes.* — Mes Collègues mathématiciens ne peuvent pas soupçonner l'état d'ignorance de nos futurs chercheurs. Il est si affligeant que je préfère rédiger, sous forme positive, et indiquer le programme minimum que nous souhaiterions *assimilé*, en particulier par nos jeunes géographes, qui, en l'état actuel de notre enseignement, sont issus en majorité de la classe de Philosophie, mais dans l'avenir viendront plutôt de Sciences Expérimentales.

1. Savoir distinguer un chiffre d'un nombre.
2. Savoir distinguer une mesure d'un calcul.
3. Savoir distinguer une mesure d'un dénombrement. Notion d'unité.
4. Savoir distinguer une grandeur du nombre qui la mesure. Systèmes d'unité.

Une anecdote : Je mesure les galets, j'exprime mes résultats en millimètres. Un de mes Collègues les mesure comme moi, mais exprime ses résultats en centimètres. D'où virgules. Et pour comparer nos résultats, cela prête à confusion. Je lui en fais la remarque, je lui demande : Pourquoi ? — Réponse : « Centimètre, système C.G.S., c'est plus scientifique. » Or, il s'agit d'un homme éminent, ayant reçu sa formation dans les Lycées.

On me dira : Ceci regardait ses professeurs de physique.

Peut-être. Mais est-ce que le mathématicien aussi n'aurait pas pu lui en parler ? Je m'en excuse : mais, pour moi non plus, jamais un de mes professeurs de Mathématiques ne s'est avisé que j'aurais peut-être à écrire des centaines de mesures alignées, et qu'il n'était pas indifférent, dans ce cas-là, d'écrire : 1,3 cm, ou 13 mm. Personne ne m'en a jamais rien dit.

Les géographes ont à mesurer, ou à faire état, de longueurs, de superficies. Qui leur enseignera les fondements ? Le physicien ? Depuis quand la géométrie est-elle une partie de la physique ? Pourquoi la notion de mesure serait-elle réservée au physicien, pourquoi le mathématicien n'aurait-il pas aussi à en enseigner les principes ? Quel mal y aurait-il à cela ? — L'élève, dira-t-on, verra deux fois la même chose. — Je réponds : Il verra qu'en géométrie, comme en physique, les mesures

posent les mêmes problèmes, admettent les mêmes discussions. Sera-ce un mal ? — Pour tout ce programme : travaux pratiques indispensables.

5. Perdre le fétichisme de la précision. Savoir que la précision s'obtient aux dépens du temps. Qu'il ne faut pas chercher plus de précision dans les résultats que dans les données, dans les calculs que dans les mesures qui leur servent de point de départ. Ne chercher, dans une mesure, ou dans un calcul, pas plus de précision qu'on n'en a besoin.

6. Avoir la notion d'erreur absolue, d'erreur relative. Calcul des erreurs : nous y reviendrons plus loin.

7. Approximations successives. Démarche essentielle dans la recherche scientifique. Quand elle se présente à nos étudiants, le tiers d'entre eux écarquille les yeux : ils n'en ont jamais entendu parler.

C. *Matières utiles.* — Je les indique en commençant par celles dont je ressens le plus impérieusement le besoin, soit chez moi, soit chez mes étudiants ou mes amis. Et je m'excuse si le libellé en est inadéquat et les coupures inhabituelles.

1. *Notion de population, d'ensemble.* — Elle se présente à chaque pas, impérieusement (et jamais, entre 12 et 18 ans, on ne m'en a parlé). Notion d'individu, limite de l'individu (pas toujours nette : un mouton est net, mais une région naturelle ? ou même une brebis gravide ?) ; population (de grains de sables, d'espèces animales, de mesures pluviométriques...), ensembles distincts (continents) se juxtaposant (Etats), se recoupant (religions), se comprenant (subdivisions administratives). Logique des ensembles (?). Echantillonnage (notion fondamentale, dont 99 % de nos étudiants n'ont jamais entendu parler).

2. *Notion de répartition, statistique, probabilité.* — Chapitre absolument fondamental. Cet enseignement devrait s'étaler sur plusieurs années. Rester simple : loi de Gauss, de Poisson. Histogramme, courbe cumulative. Médiane (la notion de médiane doit être à la portée d'enfants de 6 ou 7 ans, des expériences sont en cours à ce sujet), quartiles. Quelques tests de signification, les plus simples (ceci, en classe terminale, vers 18 ans).

3. *Notion de corrélation.* — Toutes les Mathématiques de 12 à 18 ans sont fondées sur la notion de fonction. Or, ce n'est pas celle-ci que rencontrent le géographe et le naturaliste : c'est celle de corrélation, *toujours*. Le nuage de points. Je crois qu'il y a là un point essentiel de la réforme. Il faut que la corrélation soit introduite *avant* la fonction, ou au plus tard *en même temps*. Il faut que dans l'heure même où la notion de fonction est enseignée, l'élève ait acquis cette idée qu'elle n'est qu'un cas particulier, une *chance*, rarement réalisée dans la nature. Autrement, on le trompe. Toutes les mathématiques qu'on m'a enseignées, m'ont donné une idée fausse. Une grande partie des défauts que nous ressentons chez les polytechniciens doit venir de là : l'abus de la fonction. La fonction-dieu.

La notion de corrélation pourrait être introduite à partir de n'importe quel couple de mesures, géométriques par exemple : longueur et largeur d'une feuille d'arbre, etc... Graphique. Droite de régression tracée au jugé. C'est seulement vers 17-18 ans que seraient enseignées une ou deux méthodes plus rigoureuses, et quelque test de signification.

Travaux pratiques évidemment indispensables.

4. *Rapports et proportions.* — Fondamental. Distinguer : « être proportionnel à » et « varier dans le même sens que ».

5. *Calcul des erreurs.* — Très simple : erreur sur un produit, sur un quotient.

6. *Algèbre.* — Equations du premier degré. Fonction linéaire. Inégalités.

Exponentielle. Logarithmes. Usage de la règle à calcul ou du cercle à calcul. Travaux pratiques. Tout ceci est le chapitre de base, l'exponentielle est pour nous la fonction la plus importante. Usage de la table de logarithmes.

Echelle logarithmique (semi- et bi-). Intérêt. Emploi. A mes étudiants, je l'expose ainsi : une même longueur, dans l'échelle arithmétique, représente l'addition d'un même nombre ; en échelle logarithmique, la multiplication par un même nombre. Au début, c'est très déroutant pour eux, obnubilés par les échelles arithmétiques. L'échelle logarithmique pourrait être enseignée peut-être vers l'âge de 10 ans, époque où on sait bien multiplier. Il s'agit d'une convention, et je ne vois pas pourquoi compter 1, 10, 100, 1 000, en avançant d'un pas à chaque fois, serait plus difficile que compter 1, 2, 3, 4. Une fois l'expérience faite sur des enfants de 10 ans, on pourra essayer sur de plus jeunes.

Un peu d'analyse combinatoire : ce qu'il faut pour l'étude des probabilités (17-18 ans).

7. *Calcul différentiel et intégral.* — En Sixième, en 1936, en sciences naturelles, l'étude d'allongement de jeunes plants de petits pois, de semaine en semaine, reportés sur graphiques (arithmétiques...), a conduit mes élèves à *inventer* la notion de dérivée. Je la mettrais donc au programme de Sixième, ou de Cinquième. Autres matériaux possibles pour travaux pratiques : courbes de population, ou de production, à tirer des manuels de géographie.

Calcul intégral : fonction linéaire, exponentielle, trigonométriques (vers 17-18 ans ?).

8. *Géométrie.* — Symétries et rotations : devraient être incomparablement plus développées (vers 13-15 ans ?). Travaux pratiques indispensables. La géométrie dans l'espace, pour le naturaliste, c'est avant tout une question de symétrie. Polyèdres réguliers.

Isotropie. Grandeurs vectorielles (vers 13-14 ans ?). Dérivées vectorielles (vers 17-18 ans ?).

Mesure des longueurs. Pied à coulisse. Vernier. Curvimètre. Précautions. Tout ceci est fondamental. Travaux pratiques indispensables, comme pour ce qui suit.

Mesure des aires. Emploi du planimètre intégrateur.

Mesure des angles. Rapporteur. Unités d'angle.

9. *Trigonométrie.* — Définitions de la trigonométrie plane. Relations entre les fonctions de x.

Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. Et un exemple d'application. Cette discipline élargit heureusement les idées ; elle est utile au géographe (point astronomique, projections) et au géologue (mesure des inclinaisons de couches sur une section transversale). J'ai eu l'occasion de résoudre un problème sur les dispositions de galets, grâce à elle. Je la verrais enseignée vers 17-18 ans.

En trigonométrie plane, j'ai eu l'étonnement d'avoir à utiliser une fois la sécante.

Usage des tables de valeurs naturelles des lignes trigonométriques.

Usage des tables de logarithmes (sans s'y appesantir, car il est rare qu'on ait à s'en servir : la règle à calcul nous suffit en général).

*
**

Toutes les matières qui viennent d'être indiquées, et dont l'enseignement est souhaitable, pourraient être réparties entre 6 ans et 17-18 ans. Les plus difficiles et les plus spécialisées d'entre elles seraient évidemment réservées à la classe terminale des Lycées, vers 17-18 ans, et comme il s'agit ici des jeunes gens se destinant aux sciences naturelles ou à la géographie, c'est surtout dans le programme de la classe de Sciences Expérimentales qu'elles devraient être introduites.

La classe de Philosophie et celle de Mathématiques Elémentaires fréquentées par des jeunes gens se destinant à d'autres professions, auraient des programmes

différents, adaptés aux besoins de ces professions, et ce que j'ai indiqué ci-dessus ne s'y applique pas.

Pour établir le programme futur de la classe de Sciences Expérimentales, il serait utile de tenir grand compte des besoins des sciences médicales. Pour les Mathématiques, je pense qu'ils sont pour la plupart compris dans ceux que je viens d'exposer pour les sciences naturelles et géographiques, mais une enquête est nécessaire pour le contrôler.

III. — Tendances possibles d'une réforme

De ce qui précède, on voit qu'une bonne part des Mathématiques, actuellement enseignées entre 6 et 18 ans, pourrait être gardée : presque la moitié. Outre tout ce que j'ai cité, et qui nous est directement utile, j'ajouterais *peut-être* les fractions (sans excès, et avec doute) entre 10 et 13 ans ; et sûrement la géométrie plane, comme étant l'un des fondements de la pensée mathématique. Géométrie plane et arithmétique de base mise à part, je ressens impérieusement la nécessité d'une réforme très profonde de notre enseignement mathématique. Je la voudrais d'une hardiesse extrême, bien entendu après toutes les expériences pédagogiques nécessaires, lesquelles demanderaient un an ou deux. Ces expériences seraient à tenter par de jeunes collègues. Les tendances possibles de la réforme seraient, en résumé, les suivantes :

1. Elaguer les inutilités périmées. Gain : plus de 50 % du temps.

2. Rajeunir les matières, introduire des notions modernes (ensembles, corrélation, statistique, etc...).

3. Commencer le plus tôt possible ces enseignements neufs ; certains, dès l'école primaire (c'est ici que des expériences préalables sont nécessaires).

4. Pour le neuf, comme pour l'ancien, s'en tenir à l'essentiel, élaguer toutes les babioles ; au diable les corollaires. Mais faire acquérir à fond, et ne pas hésiter à rabâcher (une *autre* année). Nous n'avons besoin, ni des détails, ni du fignolé, mais de la base, et du bien assimilé.

5. Davantage de concret au départ. Toute la pureté que vous voulez après, mais partez de la nature, à laquelle nos élèves reviendront.

6. Des travaux pratiques : ils seront une base et ils seront aussi l'aboutissement, du moins pour les futurs naturalistes et géographes. Leur création est rigoureusement indispensable.

7. Au moins les travaux pratiques devront se traduire, se matérialiser, par des tableaux de valeurs numériques et par des figures ou graphiques lisibles, propres, clairs, impeccables.

La plus grande rigueur de langage sera exigée.

8. L'horaire total des Mathématiques sera augmenté, sauf en latin-grec et en philo.

*
**

Les naturalistes et les géographes ont une tendance de plus en plus marquée à envisager des ensembles, à les étudier statistiquement, à dénombrer les choses et à mesurer les phénomènes. Cette double tendance, statistique et quantitative, est le trait le plus saillant de l'évolution récente de leurs recherches. Elle leur inspire l'impérieux désir d'une meilleure information mathématique et, pour leurs futurs successeurs, d'une meilleure formation. Ils se réjouissent à la pensée qu'une réforme — mais une réforme vraie, un rajeunissement vigoureux — permettra à la génération montante de profiter à plein du magnifique épanouissement de l'école mathématique française.

André de Cayeux, *chargé de cours à la Sorbonne.*

ÉTUDE SUR LES DIFFICULTÉS DES ÉTUDIANTS EN STATISTIQUE

Mme LEBOUTET *enseigne la Statistique aux étudiants de l'Institut de Psychologie de l'Université de Paris. Le cycle des études à cet Institut est de quatre à cinq ans au minimum.*

Il comporte un enseignement obligatoire de Statistique qui comprend des travaux pratiques. Au public d'étudiants préparant des diplômes spécialisés ouvrant accès à diverses carrières, s'ajoutent des médecins, des ingénieurs, des officiers, des ecclésiastiques, etc...

Nous remercions Mme LEBOUTET *de nous avoir autorisés à reproduire cette étude destinée au* Bulletin de l'Institut de Psychologie.

Parmi les nombreuses matières inscrites à la préparation des diplômes, la Statistique semble la plus redoutée des étudiants en Psychologie de l'Université de Paris.

Dans le but de chercher les raisons de ce fait, nous avons effectué une enquête auprès des étudiants de seconde année. Les résultats nous permettent de préciser la nature des diverses difficultés rencontrées par les élèves, difficultés déjà plus ou moins dépistées au cours de plusieurs années de séances de travaux pratiques.

L'enquête a été effectuée à l'aide des moyens suivants :

I. Un *questionnaire* soumis aux étudiants consistant en une analyse dirigée de leurs difficultés. En voici le texte :

— Eprouvez-vous des difficultés en Statistique ?

— *Quelles sont vos principales difficultés ?*

1) Difficultés mathématiques ? Vous manquez de connaissances, exemples : fractions, puissances, équations.

Exemples personnels.

2) Les notions ou principes vous paraissent difficiles parce qu'ils ne correspondent à rien dans votre esprit ; exemple : corrélation, degrés de liberté, échantillonnage, probabilité.

Exemples personnels.

3) Le vocabulaire est difficile ou ambigu.

Exemples personnels.

4) Les techniques vous paraissent difficiles à appliquer : épreuves de signification, analyse factorielle, utilisation des tables.

Exemples personnels.

5) Autres causes de difficultés.

— *Les problèmes.*

Devant un problème :

1. Vous ne comprenez pas le texte. Exemples personnels précis.

2. Vous ne voyez pas comment appliquer le cours. Exemples personnels précis.

3. Le texte vous paraît abstrait et vous préféreriez travailler sur des exemples concrets. Exemples personnels précis.

4. Autres causes de difficultés vis-à-vis des problèmes.

5. Souhaits et vœux concernant les travaux pratiques.

II. Une *épreuve de Mathématiques,* comportant une trentaine de questions à résoudre, et faisant appel aux connaissances mathématiques indispensables à l'étudiant en Statistique, c'est-à-dire :

— opérations sur les fractions numériques ou littérales ;

— opérations sur les identités remarquables ;

— construction d'une droite définie par son équation ;

— résolution d'une double inégalité du premier degré ;
— résolution d'une équation du second degré ;
— opérations sur les radicaux ;
— calcul par interpolation linéaire ;
— opération sous le signe « somme ».

III. Dix questions sur le *vocabulaire statistique :* définitions à fournir sans employer de formules.

Résultats de l'enquête

I. Difficultés mathématiques : Résultats de l'épreuve de Mathématiques.

La difficulté la plus évidente avec laquelle les étudiants sont aux prises concerne le calcul mathématique. Elle constitue un très lourd handicap pour la réussite à l'examen.

Bien que les étudiants de seconde année examinés aient déjà dû se remettre depuis un an à l'utilisation des Mathématiques après le Baccalauréat, il semble que la plupart de leurs connaissances scolaires dans cette discipline aient presque complètement disparu. Le rappel s'effectue trop péniblement pour que ces notions soient disponibles au bon moment et utilisables.

Ce qui frappe le plus dans le résultat du test, n'est pas la somme des erreurs commises, mais plutôt l'absence des réponses, car la plupart des questions ne sont pas abordées.

Les résultats de l'épreuve ont été les suivants : 1er groupe : effectif 22, moyenne 8,69 sur 20 ; 2e groupe : effectif 41, moyenne 8,10 sur 20.

Remarquons que si, dans chaque groupe, nous éliminons les quelques étudiants français titulaires du Baccalauréat de Mathématiques Elémentaires ou de Certificats de Licence scientifiques (au nombre de 7), les moyennes précédentes, affectant les bacheliers littéraires, qui constituent la majorité, s'abaissent aux chiffres suivants : 7,5 et 7,6.

Ces résultats sont particulièrement faibles et un gros effort personnel doit être fait par les étudiants pour les améliorer.

II. Difficultés en Statistique.

Les questionnaires de difficultés en Statistique et pour le Vocabulaire ne nous fournissent pas, et ne peuvent pas nous fournir, de résultats numériques aussi immédiats, en dehors de l'inventaire des difficultés principales, du relevé des fréquences de ces réponses, du relevé des erreurs ou omissions pour le vocabulaire.

Nous énoncerons séparément les conclusions concernant chacun de ces deux questionnaires.

A) *Questionnaire des difficultés :* De nombreuses difficultés ont été signalées en dehors de celles déjà proposées par le questionnaire. Citons, par exemple, les limites de confiance, l'ajustement, la droite de régression, la méthode des moindres carrés.

Les plus fréquentes sont suscitées par les tests de signification, la notion d'échantillon, les degrés de liberté, l'analyse factorielle, l'utilisation du chi carré. Ce sont en quelque sorte les noyaux de résistance contre lesquels viennent buter les étudiants.

Il nous semble alors possible de découvrir sous la variété des réponses conscientes et disparates, le petit nombre de réponses essentielles susceptibles de les expliquer et de les unifier. Mais ces réponses ne peuvent se présenter à l'esprit des étudiants, car s'ils pouvaient appréhender l'essence même de leurs difficultés, ces difficultés s'évanouiraient ou reculeraient sur un plan d'abstraction ou d'axiomatisation plus élevé ; elles ne seraient plus alors une gêne pour la manipulation des statistiques élémentaires.

Les difficultés majeures paraissent provenir d'une incompréhension de l'esprit même de la Statistique, confondu simplement avec celui des Mathématiques, sans doute parce que ces deux sciences opèrent sur des nombres. Il semble, en effet, que, malgré leurs faiblesses en calcul, les étudiants aient assimilé quelque peu l'esprit des Mathématiques, sinon leurs techniques. Ils ont acquis de cette science une idée d'absolu qui fait que des résultats numériques ne peuvent être pour eux que vrais ou faux. Cela les conduit souvent à formuler des conclusions péremptoires comme : « Ainsi, l'hypothèse nulle est fausse et nous pouvons affirmer que... », ou des réponses qui sont énoncées sans indication du seuil de probabilité auquel l'on se place.

Mais l'esprit de la Statistique est différent de celui des Mathématiques. Du fait que les résultats proviennent toujours d'échantillons prélevés dans une population donnée et que ces échantillons présentent une très grande variabilité, les données recueillies ne peuvent jamais être étudiées, comme en Mathématiques, avec une certitude totale. Il y a toujours, en ce qui les concerne, une certaine marge d'incertitude qui limite l'effort de généralisation et d'induction. Remarquons qu'il en est de même pour toute science expérimentale.

Si l'on veut déterminer la valeur d'une statistique, il n'est jamais possible de le faire avec une rigueur mathématique. Il faut se contenter de connaître un intervalle à l'intérieur duquel peut se trouver la valeur cherchée, encore faut-il y associer l'indication de la probabilité selon laquelle l'assertion est vraie, car il y a un certain nombre de chances sur cent pour qu'elle soit fausse. On ne peut donc jamais être sûr de la vérité d'une affirmation concernant une donnée calculée sur un échantillon.

Si l'on veut, en outre, comparer une statistique déterminée sur un échantillon à une donnée correspondante sur un autre échantillon réel ou théorique, en établissant le caractère valable ou non d'un « écart significatif », on retrouve la même incertitude et l'on ne peut émettre de conclusion qu'en indiquant le nombre de chances d'erreur ; encore faut-il disposer de tables convenables, établies à partir de distributions que l'on a pu étudier. L'affinement des techniques statistiques ne permet en général que de cerner l'erreur ou sa probabilité, non de la déterminer. Nous sommes donc bien loin de l'absolue vérité mathématique.

Le danger est aggravé pour les étudiants du fait que, en Statistique, comme dans beaucoup de sciences, on essaie d'adapter les données de l'expérience à un modèle mathématique. Ce peut être une distribution normale, ou un schéma linéaire comme pour l'analyse de la variance ou l'analyse factorielle. La sécurité intellectuelle que donne l'utilisation des Mathématiques peut faire oublier que ce schéma risque de s'ajuster fort mal à la réalité, d'où un emploi abusif des Mathématiques.

Inversement, les notions mathématiques peuvent être insuffisamment sollicitées, en particulier le calcul des probabilités auquel le développement de la Statistique doit beaucoup ; mais qui n'est pas à la portée des étudiants, si bien que ceux-ci, ignorant l'origine des formules, des tables, ou la justification de propriétés préliminaires conditionnant le bon usage de certaines techniques (par exemple homogénéité de la variance pour l'analyse de la variance) sont excusables d'utiliser techniques, formules et tables comme des recettes, ce qui crée un malaise chez les plus consciencieux. Nous ne voyons pas de remède à cette situation.

En conclusion, nous dirons que la difficulté majeure vient de l'incompréhension de l'esprit de la Statistique, confondu avec celui des Mathématiques dont les techniques propres ne sont d'ailleurs pas suffisamment maîtrisées pour permettre d'aller au fond des problèmes purement statistiques.

B) *Le Vocabulaire statistique* : Une difficulté non négligeable réside dans le vocabulaire tout nouveau que l'étudiant doit assimiler et qui concerne des notions qui ne lui sont nullement familières. Nous nous sommes aperçus que, d'une année à l'autre, les mêmes mots, et, au-delà, les mêmes notions, soulevaient toujours les mêmes difficultés, d'où le questionnaire sur le vocabulaire statistique.

Les définitions inexactes ou manquantes concernent principalement les mots : fréquence, erreur-type, paramètre, estimation. Mais ces lacunes ne sont que des exemples parmi beaucoup d'autres relevés au cours des séances de travaux pratiques.

Nous demandons donc aux étudiants un effort particulier pour remédier à ces déficiences.

Nous leur proposerons ultérieurement, dans le *Bulletin de Psychologie*, un Lexique de la Statistique. Il sera centré sur la compréhension des éléments essentiels de Statistique, et fournira, avec la définition des termes, des renseignements sur les difficultés de leur emploi.

*
**

Nous terminerons cette étude par des indications pratiques destinées à favoriser la résolution des difficultés relevées.

1. Révision des programmes d'algèbre de Troisième et de Seconde, faite individuellement. Il est impossible de s'attarder à ces questions au cours d'une heure de travaux pratiques par quinzaine, pour chaque groupe.

2. Etude spéciale du vocabulaire statistique à l'aide des cours et du lexique à paraître.

3. Participation à des séances de travaux pratiques organisées à l'Institut Pédagogique National (ex-Musée Pédagogique) les jours suivants : samedis : 18 janvier, 1er et 15 février, 1er, 15 et 29 mars 1958, de 10 heures à 12 heures, Salle Paul-Langevin, 1er étage (pour les étudiants de seconde année).

Mme L. Leboutet (*janvier 1958*).

Références bibliographiques

G. Darmois : L'enseignement du Calcul des probabilités et des méthodes statistiques, *Bulletin de la Société Française de Pédagogie*, n° 107, 1954, et *Cahiers Pédagogiques pour l'Enseignement du Second Degré*, 2e année, n° 3, 15 novembre 1955.

CALCUL NUMÉRIQUE ET PHYSIQUE : CE QUE LES PHYSICIENS DEMANDENT AUX MATHÉMATICIENS

Je viens, en tant que physicien, demander l'hospitalité de ce *Bulletin*, car cet article a pour but de souligner certaines discordances de nos enseignements et d'apporter le point de vue d'une partie des utilisateurs des Mathématiques.

Procédés du mathématicien. — Il ne veut connaître que des valeurs exactes. Pour lui $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ constituent un résultat entièrement calculé. S'il doit ranger dans un tableau $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{9}$ et $\frac{\sqrt{5}}{3}$ il résoudra successivement un certain nombre d'inégalités au lieu de calculer simplement des valeurs approchées, soit 0,867, 0,715, 0,890, 0,745 (calcul instantané à la règle), ce qui revient à les déduire au dénominateur commun 1 000.

L'opération $\frac{1}{2,7}+\frac{1}{3,1}+\frac{1}{1,82}$ sera faite en recherchant un même dénominateur et non en effectuant les trois divisions. On n'utilisera pas la règle à calcul, car elle n'est pas précise. Le mieux sera d'ailleurs d'utiliser les « nombres » a et b et on conservera pendant quatre pages $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ou $\sqrt{a^2+b^2}$, même si ces expres-

sions sont connues et égales à 3,21 ou 0,164. Le professeur de physique récoltera d'ailleurs cette semence en voyant ses élèves traîner pendant quatre pages

$$\sqrt{2{,}31^2 + 4{,}23^2}$$

au lieu de 4,82.

Procédés du physicien. — Il a besoin d'un résultat numérique. S'il doit calculer la résistance équivalente par $\frac{1}{R} = \frac{1}{2{,}3} + \frac{1}{3{,}7} + \frac{1}{1{,}76}$ la méthode la plus rapide est de lire les trois inverses à la règle. La résolution par recherche d'un dénominateur commun, ancré dans le cerveau des élèves est plus longue. L'expression

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

sera calculée par $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}$ et $I = \frac{V}{R}\cos\varphi$ avec l'usage de la table pour passer de $\operatorname{tg}\varphi$ à $\cos\varphi$.

S'il doit porter dans une construction graphique $10.\operatorname{tg} 30° = 10/\sqrt{3}$, il faudra se résigner à écrire $\operatorname{tg} 30° = 0{,}557$, car sur son double décimètre il trouvera 5,77 cm et non $10/\sqrt{3}$.

Exactitude limitée d'un résultat. — Lorsqu'un mathématicien écrit un nombre comme 6,21 ou 2,16, il le considère parfois comme rigoureusement juste et de ce fait $6{,}21/2{,}16 = 2{,}92129$, etc...

Cette conception ne correspond à aucun cas pratique et ne sème que des idées fausses. Qu'un nombre 6,31 exprime une longueur ou un courant, il résulte d'une mesure et sa précision est limitée (la convention générale est que $x = 6{,}31$ signifie $6{,}30 < x < 6{,}32$). La précision du quotient est donc limitée : sans faire de calculs d'incertitudes $6{,}31/2{,}16 = 2{,}92$, et non un chiffre indéfini et impossible à écrire. De même $43{,}2.0{,}0632 = 2{,}73$ et non 2,73024. Le volume d'une sphère de rayon 1,11 cm est 5,16 cm^3 et non un nombre de huit ou dix chiffres.

Cette conception du chiffre juste résulte d'un enseignement se faisant de 6 à 15 ans, sans contre-partie. Le physicien, qui ne commence qu'en Seconde, récolte cette semence solidement germée et il éprouve d'insurmontables difficultés pour faire supprimer les chiffres inutiles après des calculs d'erreurs souvent incompris (qui pourraient d'ailleurs être très allégés s'il ne fallait pas lutter à contre-courant). Il faut parvenir à la 4e ou 5e année de physique pour rencontrer certains élèves qui n'éprouvent plus de difficultés sur ce point, alors que l'affirmation *a priori*, par notre collègue de Mathématiques en Quatrième ou Troisième du fait qu'un résultat ne peut être plus précis que les données nous faciliteraient infiniment le travail. Cela montrerait aux élèves qu'il n'y a qu'une science et non deux sciences qui se contredisent.

Ecriture sur une ligne (écriture décimale). — Les fractions utilisées doivent avoir une puissance de 10 comme dénominateur et non comme numérateur. L'écriture 0,5 ou 0,25 est plus logique que 1/2 ou 1/4. L'addition $2/5 + 1/4$ est moins commode que $0{,}40 + 0{,}25$ (voir les classiques additions du Baccalauréat avec des 1/3 et des 1/4).

Il est plus commode pour l'élève (et pour le professeur qui corrige) d'écrire sur une ligne au lieu de deux, surtout à la machine à écrire. Du moment qu'une fonction linéaire s'écrit $ax + b$ et non $1/a.x + b$, il est plus logique d'écrire $0{,}5mv^2$ ou $0{,}5ah$ que $1/2.Mv^2$ ou $S = 1/2.ah$.

J'ai souvent rencontré des élèves qui, pour dériver $\sin\frac{A+D}{2}$ (variable D), tentaient d'utiliser la dérivée de u/v, car ils ne voyaient pas immédiatement que l'expression était de la forme $\sin(ax + b)$. Ces mêmes élèves ne faisaient pas la

faute avec l'écriture $\sin 0{,}5\,(D + A)$ ou $\sin (0{,}5\,D + 0{,}5\,A)$ forme d'ailleurs infiniment plus facile à écrire à la machine. Pourquoi leur fabriquer un dénominateur dans $\sin (ax + b)$?

L'écriture $n = \dfrac{\sin 0{,}5\,(D + A)}{\sin 0{,}5\,A}$ est infiniment moins encombrante au tableau ou sur feuille que l'écriture sur quatre étages $n = \dfrac{\sin \dfrac{D+A}{2}}{\sin \dfrac{A}{2}}$, source d'erreur lorsque l'élève finit par écrire $\dfrac{\sin (D + A)}{2}$ au lieu de $\sin \dfrac{D+A}{2}$. Les habitudes et la répugnance des zéros est telle que l'élève devant calculer $2/7$ préfère diviser 7 par 2 pour aboutir à $1/3{,}5$, au lieu de diviser 2 par 7, soit 0,286 et fabriquer un dénominateur.

Programme. — Il semble souhaitable que ces programmes comportent un peu plus de calcul numérique : savoir diviser par 0,002, passer de 0,004 à 4.10^{-3} ou de $46{,}3.10^{-6}$ à $4{,}63.10^{-5}$, choses que ne font pas, sans multiples erreurs, même chez des élèves de Spéciales.

L'extraction d'une racine carrée ne comporte qu'assez peu d'intérêt : cette extraction se fera à la table de log ou à la règle. Les élèves de philo ? je crois qu'ils continueront à trouver la racine par tâtonnements, car combien savent extraire une racine ?

Enfin, les recherches de P.P.C.M. ou de P.G.C.D. pourraient être un peu abrégées, car ces recherches n'ont de sens que sur les nombres exacts, somme toute assez rares.

Conclusion. — Sans aborder la question des programmes, il semble que les physiciens soient d'accord pour demander aux professeurs de Mathématiques les quelques points suivants qui ne leur feraient perdre que peu de temps :

1° Dire aux élèves que, par exemple, $6{,}31/2{,}16 = 3{,}07$ et non 3,0723, qu'en un mot, la précision d'un résultat est limitée, même dans une multiplication.

2° Ecrire plus souvent 0,5 pour $1/2$, 0,2 pour $1/5$, 0,25 pour $1/4$, et même parfois 0,33 pour $1/3$. D'une façon générale, écrire plutôt sur une ligne que sur deux.

3° Si les lignes trigonométriques $1/\sqrt{2}$. $\sqrt{3}/2$ sont inévitables sous cette forme, il serait utile de calculer numériquement une fois la hauteur d'un triangle équilatéral et de dire une fois que $\sqrt{3}/2 = 0{,}866$, valeur que l'on trouve à la table ou à la règle (il est curieux que l'élève débutant à la règle soit incapable d'y reconnaître sin 30° ou tg 30°).

4° Remplacer parfois dans une discussion $\sqrt{3/2}$ ou $\sqrt{5/3}$ par le nombre 0,866 ou 0,745 pour montrer que le nombre décimal existe.

5° Effectuer parfois un calcul numérique. Indiquer que $\dfrac{1}{3{,}71} + \dfrac{1}{5{,}27}$ peut être effectué aussi, s'il s'agit d'un calcul approché en prenant 1 comme commun diviseur... c'est-à-dire en faisant les deux divisions.

6° Montrer une fois aux élèves de Première C.M. ou M.E. qu'un calcul approché peut être fait à la règle à calcul (ce jour-là, le professeur de Mathématiques pourra emprunter celle du physicien). Cette démonstration, non immédiatement rentable, permettra au physicien de n'être plus discuté lorsqu'il conseillera cette méthode de calcul approché.

Custaud (*Bugeaud*, Alger).

REFLEXIONS SUR LE NOUVEAU PROGRAMME DE SIXIÈME

I. Mesure des longueurs, des angles, des arcs. — Unités

C'est une idée heureuse et opportune que de reprendre l'étude de la mesure de quelques grandeurs fondamentales en regroupant et en systématisant ce qui était, jusqu'ici, épars et utilitaire.

Peut-être aurait-on pu lier plus étroitement les mesures de ces trois grandeurs en faisant remarquer, au moins dans les « Travaux pratiques » :

1° que la mesure des longueurs utilise le glissement de la droite sur elle-même (bande de papier) ;

2° que la mesure des angles utilise le glissement du plan sur lui-même (papier calque) ;

3° que la mesure des arcs d'un même cercle utilise le glissement d'un cercle sur lui-même (report d'arcs au moyen d'un cercle égal, découpé, maintenu en coïncidence avec le cercle donné par une épingle piquée au centre et fonctionnant comme la bande de papier).

II. Comparaison expérimentale de la longueur d'un arc et de sa mesure en degrés

Cet alinéa du programme étonne un peu, et pour deux raisons :

1° Aucun débutant n'a jamais eu aucun doute sur l'égalité des arcs interceptés (sur un même cercle) par des angles au centre égaux, ni sur la proportionnalité de l'angle au centre et de l'arc intercepté ; la vérification par le papier calque est immédiate, et, à défaut, il suffit à l'élève de regarder un rapporteur pour comprendre et être convaincu.

Il en est bien différemment, par exemple, du rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre, ou de la somme des angles d'un triangle ; là, d'avance, on ne sait pas, de sorte qu'un élève sera toujours intéressé par une détermination expérimentale de π ou de la somme des angles d'un triangle.

2° Cette comparaison expérimentale n'est pas facile.

On peut aisément mesurer la longueur d'un arc sur une roue de bicyclette ou de tombereau, mais comment mesurer l'angle au centre correspondant ?

On peut aisément mesurer un angle au centre sur un disque (en carton, en tôle...), mais comment mesurer la longueur de l'arc intercepté ? la ficelle ne tient pas sur le bord du disque, ni même le mètre souple de la couturière ; on pourra essayer avec le mètre en ruban d'acier, ou bien tourner la difficulté en faisant rouler (sans glisser) le disque sur une droite préalablement tracée sur une table, en marquant les points de contact de chaque extrémité de l'arc.

Ces détails d'exécution amènent à remarquer qu'on est également étonné de trouver cet alinéa dans le programme lui-même, et non dans les « Travaux pratiques ». Ce n'est pas grave ; la frontière n'est nullement donnée comme absolue, et on peut transposer.

III. La sphère, surface de révolution ; étude expérimentale

Là, j'applaudis fort et longtemps.

Peu de propriétés géométriques élémentaires sont aussi gonflées d'importance et d'applications que cette génération de la sphère, autour de n'importe lequel de ses diamètres.

Comme on le dit, en bref : *la sphère peut glisser sur elle-même,* et de bien des façons.

Les méridiens et les parallèles sont essentiellement de la géométrie ; ils n'ont été que trop longtemps abandonnés aux géographes.

Nous aurons d'ailleurs besoin d'eux en astronomie (travaux pratiques de Sixième bien entendu).

Longitude et latitude. — Un esprit chagrin observera qu'on introduit les coordonnées sphériques bien avant les coordonnées cartésiennes.

Ça ne me touche pas. Est-ce notre faute si la Terre est ronde ? On a eu assez de mal à s'en apercevoir ! Au surplus, cette anticipation est de toujours ; mais comme c'était le géographe qui anticipait, on ne s'en apercevait pas.

IV. Définitions relatives à quelques solides

J'aurais aimé que l'introduction si opportune des « Travaux pratiques » permette, de la Sixième inclus à la Quatrième inclus, une initiation prudente et continue à la géométrie dans l'espace.

Dès la Sixième, le parallélépipède rectangle, le solide le plus largement présent autour de nous (malheureusement desservi par un nom encombrant), devrait permettre de parler de droites et plans parallèles, de droites et plans perpendiculaires ; acquérir et comprendre un vocabulaire, c'est déjà beaucoup. Nous serons bien obligés de dire que les parallèles géographiques sont dans des plans parallèles, que le plan d'un parallèle est perpendiculaire à l'axe de la Terre et que tout parallèle et tout méridien sont dans des plans perpendiculaires.

En Cinquième, on aurait pu trouver d'excellents travaux pratiques de géométrie dans l'espace sur les solides usuels, et aussi sur les trois premiers polyèdres réguliers : cube, tétraèdre, octaèdre.

Mais revenons à la Sixième. Je crois utile qu'on fasse remarquer, sans insister :

que le cylindre peut glisser sur lui-même ou tourner sur lui-même (des collerettes ou rainures permettent, en pratique, de ne retenir et de n'utiliser que l'un de ces deux mouvements) ;

que le prisme peut glisser sur lui-même ;

que le cône peut tourner sur lui-même.

V. Mesure des poids ; la balance

Introduction excellente ; les nombreuses connexions expérimentales : longueurs et poids, aires et poids, volumes et poids... y trouvent un solide appui.

La boîte de poids aurait mérité d'être évoquée ; la succession astucieuse des valeurs se retrouve ailleurs, notamment dans les boîtes de résistance.

Pourquoi, après « mesure des poids », n'avoir pas ajouté : « unités », comme partout ailleurs ? Nous avons deux unités fondamentales qui sont des étalons : le mètre et le kilogramme ; on ne peut guère parler de l'un sans parler de l'autre ; ensemble, ils permettent un rappel rapide de leur état de dissidence par rapport aux définitions théoriques des fondateurs du Système métrique ; ce manque de prévision de la part d'hommes de science éminents a un grand intérêt historique et philosophique.

On ne saurait d'ailleurs se passer du kilogramme-étalon pour définir le litre ; en fait, nous avons trois unités fondamentales définies par un étalon : le mètre, le kilogramme et le litre.

Cette omission des unités de poids ne semble donc pas correspondre à une intention, mais à un oubli.

VI. Tableaux de correspondance entre quelques nombres Représentations graphiques

On parle de tableaux de correspondance dans le programme de Sixième, mais on attend le programme de Cinquième pour évoquer discrètement leur représentation graphique éventuelle.

A mon avis, l'un ne va pas sans l'autre ; le tableau sans graphique ne dit rien ; le graphique a été inventé pour faire parler le tableau.

On voit des graphiques sur tous les murs, sur tous les journaux, dans beaucoup d'appareils enregistreurs ; ils sont devenus un moyen de publicité fréquemment employé ; la compréhension et la construction d'un graphique ne sauraient donc embarrasser un élève de Sixième.

Quoi de plus séduisant, et de plus opportun que d'étudier la proportionnalité et la règle de trois sur un graphique, et aussi de représenter un mouvement uniforme par un graphique ?

Dans l'Enseignement Primaire, le programme de la classe de Fin d'Etudes (parallèle à la Sixième) fait explicitement une place plus large aux représentations graphiques.

VII. Notions d'astronomie

Là, encore, il convient d'applaudir.

Et même, comme pour la balance, on a beaucoup attendu ; ces nouveaux programmes sont du 12 août 1957, et le Spoutnik est du 4 octobre ; nous ne sommes pas à la traîne, mais il s'en est fallu de peu.

Désormais, l'astronomie a droit de cité dans le premier cycle secondaire, à la fois comme élément de culture générale, comme thème d'initiation expérimentale et comme technique mondiale et intersidérale.

Prudemment et sagement, le programme ne parle, ni de sphère locale, ni de sphère des fixes, car il redoute l'enflure de ceux qui veulent trop bien faire.

Je n'ai pas la même raison de ne pas me risquer à dire qu'à mon avis, l'une et l'autre doivent apparaître dès la Sixième, car c'est le meilleur moyen, le plus simple et le plus sûr, de bien faire comprendre le mouvement diurne.

Je prends également le risque d'enfoncer une porte ouverte en indiquant où l'on peut trouver, pour chaque mois, les renseignements essentiels, aspect du ciel, lever et coucher du Soleil et de la Lune, position des planètes :

L'Astronomie, Bulletin mensuel de la Société Astronomique de France, 28, rue Serpente, Paris, VIe et Librairie Gauthier-Villars ;

L'Ananach Hachette (en dépit d'une partie astrologique et prophétique, bien déplaisante et bien déplacée) ;

L'Annuaire astronomique Flammarion ;

L'Annuaire du Bureau des Longitudes (Gauthier-Villars).

Ce dernier ouvrage peut paraître démesuré pour ces rudiments d'astronomie, mais il est par ailleurs d'une telle richesse de documentation sur les unités, sur les masses volumiques, sur les phénomènes astronomiques, sur le calendrier... que je n'hésiterais pas à le faire acheter tous les ans par le Lycée, si j'étais encore professeur.

Conclusion

Laissant de côté des observations de détail, je veux dire, pour conclure, que ce nouveau programme oblige à penser ; il ne peut manquer d'intéresser maîtres et élèves ; c'est le meilleur compliment qu'on puisse lui adresser.

François Brachet.

FAMILLES DE PROBLÈMES

Un exercice pour le développement mental des élèves de Sixième et de Cinquième et peut-être au-delà

Pour cet exercice, il faut prendre un texte très simple que les élèves, même les plus faibles, puissent dominer entièrement, car l'intérêt de la chose n'est pas dans la résolution plus ou moins habile d'un problème.

Par exemple, ceci :

J'ai acheté des jouets pour une somme de 760 F. Il y a 7 baigneurs coûtant chacun 80 F et 5 Peaux-Rouges à 40 F la pièce.

La question est : Est-ce possible ?

Ce texte est possible, c'est préférable pour commencer.

Les enfants cherchent à leur guise si le compte est juste. On peut s'attendre à ce que, sans raisonner le moins du monde et généralement sans même donner un titre à leurs calculs, tous fassent ceci :

$$80\ \text{F} \times 7 = 560\ \text{F},$$
$$40\ \text{F} \times 5 = 200\ \text{F},$$
$$560\ \text{F} + 200\ \text{F} = 760\ \text{F}.$$

C'est bien ça.

On leur demande alors : « Pour vérifier cette histoire, quel problème avez-vous résolu ? »

Ils ont résolu :

(1) J'ai acheté 7 baigneurs à 80 F l'un et 5 Peaux-Rouges à 40 F la pièce, quelle somme ai-je dépensée ?

Puis on demande : « Auriez-vous pu vérifier en donnant la somme dépensée et en posant une autre question ? »

On finit par établir le tableau suivant qui rassemble tous les problèmes que l'on peut se poser, les données et la réponse étant dans le texte :

	(1)	(2)	(2 bis)	(3)	(3 bis)
Nombre de baigneurs	7	?	7	7	7
Nombre de Peaux-Rouges	5	5	?	5	5
Prix d'un baigneur	80	80	80	?	80
Prix d'un Peau-Rouge	40	40	40	40	?
Somme dépensée	?	760	760	760	760

Faire le tableau est facile et amusant. Dire ou écrire un énoncé correct pour chaque problème présente pour certains quelque difficulté.

Dans cet exemple, aucun des trois problèmes-possibles n'est difficile à résoudre, mais (2) et (3) sont moins immédiats, moins naturels que (1).

On les résout.

Il en résulte un état de surprise et de satisfaction. Ce très simple exercice intéresse beaucoup les élèves. Il les porte à s'étonner et à réfléchir. Je pense qu'il développe en eux le goût et le pouvoir de saisir une question dans son ensemble et cette mystérieuse faculté de synthèse, qui nous sert constamment et nous est indispensable et dont nous ne savons rien (du moins je crois).

Remarques : 1. La solution de chacun des trois problèmes peut servir de vérification aux deux autres. Pour (2) et (3) il sera naturel de préférer la solution de (1) qui est la plus simple.

De même, la solution de (1) donnera la solution algébrique de (2) et (3), d'où l'intérêt accru de cet axiome pour la classe de Cinquième ; il peut être bon alors de prendre un exemple où l'un des problèmes au moins serait difficile.

On voit en même temps qu'il serait ridicule de chercher une solution algébrique de (1).

Certains, se référant à la tradition, appellent le raisonnement de (1) « synthétique » quand il résout (1), et « analytique » quand il sert à résoudre (2) et (3), ce qui n'ajoute rien à la compréhension de la chose, au contraire.

2. Le même exercice peut s'appliquer à un texte de géométrie, mais il peut y avoir des difficultés si celui-ci n'est pas assez précis, comme il arrive. Il introduit la notion de *réciproque*.

Exemple : Tout se passe dans un angle $\widehat{xoy}$ saillant ou plat. Il y a deux angles aigus et égaux $\widehat{xoA}$ et $\widehat{yoB}$ et une demi-droite oz formant les angles aigus égaux $\widehat{zoA}$ et $\widehat{zoB}$, adjacents. L'angle $\widehat{zoy}$ est droit. Est-ce possible ? (Justifier avec les définitions et les propriétés connues).

Le tableau des problèmes posés et résolus par ce texte est :

	(1)	(2)	(3)	(4)
$\widehat{xoy}$ saillant ou plat	plat	plat	plat	?
$\widehat{yoB}$ et $\widehat{xoA}$ aigus, égaux	oui	oui	?	oui
$\widehat{Aoz}$ et $\widehat{zoB}$ aigus, égaux et adjacents.....	oui	?	oui	oui
$\widehat{zoy}$ droit	?	droit	droit	oui

(tout est contenu dans $\widehat{xoy}$).

Pour chaque problème, on fait la figure en notant les hypothèses (ce que l'on fait exprès) et on prouve les conclusions (ce qui se produit nécessairement, sans qu'on le fasse exprès) en raisonnant avec les définitions et les propriétés connues, si on le peut, en tout cas, on les distingue nettement des hypothèses.

Il n'y a pas d'inconvénient à ce que, au cours de cet exercice, les élèves se trouvent en face d'un problème qui dépasse leurs forces : il est bon pour eux de se sentir plongés dans un moule trop grand qu'ils auront à remplir en grandissant.

Mlle Goukowsky (*Lycée Montaigne*).

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

(*enquête permanente*)

Une anomalie

Si un élève de Quatrième définit le triangle isocèle ou le parallèlogramme comme triangle qui a deux côtés *et* deux angles égaux ou comme quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles *et* égaux, il se fait sévèrement reprendre ; peut-être même ironisera-t-on « ...*et* dont les diagonales se coupent en leur milieu ». Mais dans tous les manuels de Troisième que j'ai entre les mains, sauf un, deux triangles sont *par définition* semblables s'ils ont leurs angles respectivement égaux *et* leurs côtés proportionnels. J'ai beau chercher, je ne trouve — heureusement — dans le cours secondaire complet de Mathématiques aucune autre définition surabondante.

Je propose, pour la première leçon sur les triangles semblables, le plan suivant :

1) *Motion expérimentale de similitude.* — Si je double l'échelle de la carte de France, sa forme ne change pas. Le triangle Paris-Strasbourg-Marseille conserve ses angles et double ses côtés.

2) *Une parallèle à un côté d'un triangle.* — Elle découpe un triangle ressemblant. Théorème : Les deux triangles ont les angles égaux et les côtés proportionnels.

3) *Définition. — Deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles respectivement égaux.* Théorème : Ils ont leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels. Car par transport on retrouve la figure précédente.

Faire remarquer que l'égalité de leurs angles ne suffirait pas pour la ressemblance de deux polygones quelconques, en dessinant un carré et un rectangle allongé.

4) *Les deux cas de similitude.* — Deux côtés proportionnels et l'angle compris égal. Trois côtés proportionnels.

Faire remarquer qu'il sera plus facile de démontrer une similitude de triangles qu'une égalité (deux égalités au lieu de trois), car cette dernière exige la même grandeur en plus de la même forme.

La seule définition non surabondante que j'ai trouvée dans un livre de Troisième est : « On dit que deux triangles sont semblables, si l'un d'eux est égal à un triangle homothétique de l'autre par rapport à un sommet », précédée d'une définition de cette homothétie particulière de triangles.

Elle présente l'avantage sérieux de pouvoir être appliquée plus tard au polygone, et celui — purement formel — de ne parler ni d'angles, ni de côtés et de maintenir un certain parallélisme entre les cas d'égalité et les cas de similitude. Mais cette longue définition en deux parties alourdit la mémoire de l'élève de Troisième d'un terme savant qui ne figure pas à son programme et dont il ne se servira jamais pendant l'année (1). Quant au fait qu'avec ma proposition il n'y aurait plus que deux cas de similitude au lieu de trois, il me semble plutôt une simplification. Ma définition parle d'angles et non de côtés ? Toute définition est un choix, puisque toute propriété caractéristique pourrait la remplacer. Si, pour définir le triangle isocèle, on parle de côtés et non d'angles, cela est (l'étymologie mise à part), ni plus ni moins arbitraire.

E. EHRHART, *professeur au Lycée Kléber, Strasbourg.*

Centre et diamètres d'un faisceau harmonique.

Etant donné un faisceau harmonique S.ABCD, le point S est ordinairement appelé le sommet du faisceau, les droites SA et SB par exemple des rayons conjugués.

La première définition présente un inconvénient dès la classe de Seconde. On a beau définir un faisceau harmonique comme un ensemble de quatre droites, découpant sur toute sécante une division harmonique, il existe toujours des élèves qui ne sont pas convaincus de la validité de cette propriété, lorsque la sécante coupe « le prolongement » de l'un ou plusieurs des « rayons ».

Pourquoi ne pas appeler S le centre du faisceau, puisque c'en est le centre de symétrie. Les droites SA, SB, SC et SD s'appelleraient alors des diamètres, SA et SB des diamètres conjugués.

Cette désignation est d'autant plus valable que chacune des droites SA et SB est le lieu des milieux des « cordes » (du couple SC, SD) parallèles à l'autre, tout comme dans une conique à centre dont un couple de droites constitue une dégénérescence ponctuelle (dégénérescence apparaissant en Mathématiques lorsqu'on cherche le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe F et à une droite fixe D est égal à une constante e supérieure à 1, F étant sur D).

L'unicité du couple de diamètres conjugués perpendiculaires, constituant deux axes de symétrie du couple de droites, pourrait ainsi être rapprochée de la propriété correspondante des coniques à centre.

---

(1) Une grande difficulté pour le jeune débutant en Mathématiques, nous disait M. FRÉCHET, est l'emploi de mots nouveaux, techniques ; il ne faut en introduire que si cela est strictement indispensable et répéter au début souvent leur définition quand on les emploie.

Il n'y aurait d'ailleurs que des avantages à appeler, dans le même ordre d'idées, centre d'une surface conique de révolution le point ordinairement appelé sommet, même s'il est assez rare qu'on soit conduit en Mathématiques à souligner que le lieu des centres des sections de la surface par les plans ayant une direction donnée est le diamètre conjugué de cette direction : au moins réaliserait-on une plus grande cohérence entre les vocabulaires de Mathématiques et de Spéciales.

Albert BENHAIM (*Lycée de Bar-le-Duc*).

Linéaire ou affine ?

En classe de Troisième, nous distinguons entre quantités proportionnelles et quantités à différences proportionnelles. Dans le mouvement uniforme, $x + vt + a$, l'abscisse x n'est pas proportionnelle au temps ; elle l'est au contraire si la formule est $x = vt$. A ces deux fonctions bien différentes, nous appliquions le même adjectif : fonctions linéaires. Le terme vient de l'ancien temps où une *ligne*, c'était une *ligne droite*, et linéaire signifiait « dont le graphique est une droite ».

Mais lorsqu'on parle de combinaison linéaire, par exemple, pour l'élimination d'une inconnue, puis, plus tard, de transformations linéaires, le mot « homogène » est sous-entendu.

Une terminologie différente est maintenant fixée et il faut bien que l'Enseignement Secondaire l'accepte pour le bien des élèves : le mot *linéaire* est réservé à l'acception : du premier degré et homogène, de sorte que, dans la correspondance, on ait :

$$\left.\begin{array}{c} x \rightsquigarrow y \\ \lambda x \rightsquigarrow \lambda y \\ x_1 + x_2 \rightsquigarrow y_1 + y_2. \end{array}\right| \quad \text{type } y = ax$$

Une correspondance est dite *affine* si elle est du premier degré non homogène : alors

$$\left.\begin{array}{c} x \rightsquigarrow y \\ \lambda (x_1 - x_2) \rightsquigarrow \lambda (y_1 - y_2). \end{array}\right| \quad \text{type } y = ax + b$$

La transformation ponctuelle fondamentale de la géométrie affine est l'affinité (qu'au temps lointain où j'étais élève de Mathématiques Elémentaires mon professeur appelait « multiplication des ordonnées »). Dans l'espace vectoriel, on étudie les transformations linéaires qui font passer d'une base à une autre.

Il semble que la tendance est d'utiliser l'adjectif sous la forme invariable. M. LICHNÉROWICZ dit « un tenseur affine ». Un très ancien problème d'Agrégation ou de Concours général (il y a une vingtaine d'années, si j'ai bonne mémoire) employait le masculin « affin ». Qu'en pensent les membres de l'A.P.M. ?

Rappelons qu'on appelle *forme linéaire*, par exemple à trois variables, une expression du type $ax + by + cz$, et forme bilinéaire une expression comme

$$ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2.$$

L. FÉLIX (*La Fontaine*, Paris).

UN PROJET DE PROGRAMMES SCIENTIFIQUES

Le projet publié ci-dessous est présenté par le Mouvement National pour le Développement Scientifique. Il concerne uniquement les classes de Seconde et Première classiques et modernes scientifiques et la classe de Mathématiques. Ses auteurs, membres du Comité provisoire du M.N.D.S., sont des professeurs de l'Enseignement Supérieur.

Les membres de l'A.P.M. diront, lors de leur prochaine Assemblée générale, si le Comité de leur Association doit faire sien tout ou partie de ce projet ou, au contraire l'écarter. Sa publication dans le Bulletin *répond donc à un but d'information.*

Classe de Seconde Sciences (5 heures par semaine)

INTRODUCTION.

Notions sur les ensembles : réunion, intersection, appartenance, complémentaire (à l'aide d'exemples concrets). Relations d'équivalence, relations d'ordre.

ALGÈBRE.

1. *Nombres réels.* — Rappel des propriétés des entiers (positifs, nuls et négatifs). Congruences, parité, preuve par 9. Système de numération de base a, et preuve par $a - 1$.

Rappel des propriétés du corps des nombres rationnels.

Extension de ces propriétés (sans démonstration) aux nombres décimaux illimités, le corps des nombres réels (la dénomination « nombres algébriques » doit être abandonnée).

Puissances entières et positives. Rapports et proportions.

Révision du calcul algébrique (égalités et inégalités). Monômes, polynômes, fractions rationnelles. Formule du binôme, pour les petites valeurs de l'exposant (sans théorie) ; construction expérimentale du triangle arithmétique de Pascal.

2. *Fonctions.* — Notion de fonction d'une ou plusieurs variables (exemples numériques, géométriques et physiques). Il est rappelé que les fonctions et équations ne doivent jamais dépendre d'un paramètre.

Fonctions d'une variable et construction des courbes. Fonctions monotones. Fonction affine et fonction linéaire (1) d'une ou plusieurs variables, liaison avec la géométrie. Notion de moyenne. Fonction bilinéaire $z = axy$: toute fonction bilinéaire de deux variables, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune d'elles, quand l'autre est fixée, est proportionnelle à leur produit. Fonction $y = x^2$, $y = x^n$, fonctions polynômes, fonction $y = ax^2 + bx + c$, fonction $y = ax^{-1}$, relations homographiques et involutives.

3. *Equations du premier degré.* — Système d'équations du premier degré, substitution et combinaison. Problèmes du premier degré.

Le cas d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues doit être traité d'une façon générale, et pas seulement avec des exemples numériques.

Les problèmes du premier degré doivent être traités en liaison avec la géométrie ; l'équation d'une droite est $ax + by + c = 0$, droites parallèles (et perpendiculaires), intersection de deux droites.

4. *Equations du deuxième degré.* — Equation du deuxième degré à une inconnue ; existence et calcul des racines ; somme et produit des racines. Signe du trinôme. Application à l'étude graphique des fonctions trinômes du deuxième degré, et au problème du signe des racines.

5. *Notion élémentaire de probabilité.* — Définition, probabilité simple et probabilité composée. Exemples pratiques.

GÉOMÉTRIE PLANE.

1. *Fondements.* — Les axiomes choisis pour fonder la géométrie seront énoncés explicitement ; on ne cherchera pas à réduire au minimum le nombre des axiomes, mais à choisir ceux qui parlent à l'esprit ; le mieux est d'arriver le plus vite possible, par des axiomes surabondants, à démontrer des théorèmes non évidents. Le choix de

(1) Il est rappelé que $y = ax + b$ est une fonction affine, $y = ax$ une fonction linéaire.

ces axiomes est laissé au professeur. Revoir les propriétés essentielles des triangles, des parallélogrammes. Introduire la notion d'ensembles géométriques égaux ou symétriques, de symétries d'un ensemble géométrique.

2. *Structure affine.* — Vecteurs, somme, produit par un scalaire. Théorème de Thalès. Groupe des translations. Groupe des homothéties de centre donné. Barycentre de deux ou trois points affectés de coefficients de signe quelconque, application à la composition d'un système de forces parallèles. Etude élémentaire des ensembles convexes, application à la base de sustentation en physique. Repérage d'un point du plan par deux axes de coordonnées, éléments de géométrie analytique.

3. *Géométrie métrique.* — Ensembles géométriques semblables, cas de similitude des triangles.

Produit scalaire de deux vecteurs. Lignes trigonométriques d'un angle compris entre 0 et π. Usage des tables.

Théorème de Pythagore, et relations métriques dans les triangles rectangles et les triangles quelconques, par le produit scalaire.

Relation $a/\sin A = \ldots = 2R$. Expressions diverses de l'aire du triangle. Valeurs approchées de $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $1 - \cos x$, pour un petit angle exprimé en radians.

4. *Le cercle.* — Rappel des propriétés des cordes, arcs, angles inscrits et angles au centre, tangentes. L'arc capable ne sera étudié que pour des angles non orientés.

Polygones réguliers, cas usuels (le côté et l'apothème du pentagone et de l'octogone régulier convexe ne seront pas calculés). Comparaison des périmètres de deux polygones convexes, dont l'un contient l'autre. Périmètre du cercle (indications sommaires). Longueur d'un arc de cercle. Radian.

Puissance d'un point par rapport à un cercle. Applications à des problèmes de lieux géométriques et de constructions.

Aire du cercle et du secteur circulaire.

5. Division harmonique de points alignés. Faisceaux harmoniques de droites. Segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les bissectrices de l'angle opposé. Lieu des points dont le rapport des distances à deux points est donné.

Axe radical de deux cercles, faisceau de cercles (notions élémentaires).

REMARQUE.

Le souci d'exposer un cours bien coordonné et logiquement fondé n'exclut pas, mais au contraire recommande, un constant recours au concret (modèles), soit pour justifier les axiomes, soit pour utiliser les connaissances acquises à la solution de problèmes concrets. Des travaux pratiques de Mathématiques illustreront ces rapports entre le concret et l'abstrait.

Classe de Première Sciences (5 heures par semaine)

ALGÈBRE et ANALYSE.

Progressions arithmétiques et géométriques. Logarithmes (1).

Division des polynômes suivant les puissances décroissantes.

Notion de fonction. Fonction inverse d'une fonction monotone ; exemples.

Dérivée d'une fonction en un point. Interprétation géométrique. Calcul des dérivées de $u + v$, uv, $f[u(x)]$, des polynômes, de $\sin x$, $\cos x$. Fonction dérivée ; relation entre le sens de variation d'une fonction et le signe de la dérivée. Variation d'une fonction ; application aux polynômes de $\sin x$, $\cos x$.

---

(1) Le professeur peut, s'il le désire, introduire le logarithme comme primitive de $\frac{1}{x}$.

Cinématique du mouvement rectiligne : vitesse, accélération ; mouvement uniformément varié.

Primitive d'une fonction. Interprétation géométrique (on admet la notion d'aire) et le fait que si une fonction a une dérivée nulle en tout point, elle est constante. Cas des polynômes. Application au calcul des aires et volumes usuels, troncs de cylindres, de cônes, sphère.

Extension de la notion d'arc et de la notion d'angle. Formule de Chasles. Lignes trigonométriques des angles quelconques.

Fonctions circulaires correspondant à des arcs opposés, supplémentaires ou complémentaires. Equations $\sin x = \sin a$, $\cos x = \cos a$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$.

Formules d'addition. Expression de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ en fonction de $\operatorname{tg} x/2$. Usage des tables de sinus, cosinus, tangentes et de leurs logarithmes.

Problèmes simples conduisant à une équation du premier ou du deuxième degré quand on prend comme inconnue une ligne trigonométrique. Problèmes conduisant à étudier la variation d'un polynôme de ces lignes.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

1. *Plan et ligne droite.* — Les fondements axiomatiques de la géométrie dans l'espace seront présentés en utilisant des axiomes simples et très forts, éventuellement surabondants. Droites et plans parallèles (le parallélisme de droites est une relation d'équivalence). Droites et plans perpendiculaires. Projection orthogonale. Projection d'un angle droit.

Angle d'une droite et d'un plan. Plus courte distance de deux droites.

2. *Vecteurs.* — Opérations sur les vecteurs. Projection sur une droite ou un plan. Translations et homothéties : $\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM} + \vec{B}$.

Barycentres de p points affectés de coefficients de signe quelconque. Définition et propriétés des ensembles convexes.

3. *Fonctions bilinéaires de deux vecteurs.* — Produit scalaire ; applications.

Orientation du plan et de l'espace. Produit vectoriel. Application à l'électromagnétisme.

4. *Etude élémentaire de transformations.* — Notion de transformation. Transformation inverse ; groupe de transformations.

Translations. Homothéties. Projection orthogonale.

Symétries par rapport à un point, une droite, un point. Produit de deux symétries. Décomposition d'une isométrie en produit de symétries. Groupe des isométries du cube et du tétraèdre régulier. Ensembles semblables dans l'espace.

5. *Cylindres ; cônes.* — Leur invariance pour un groupe de translation ou d'homothéties. Bases. Plan tangent.

6. *Mesure des aires et des volumes.* — Enoncé, sous forme d'axiomes, des propriétés de l'aire pour les polygones plans et du volume pour les réunions de tétraèdres. Additivité ; croissance ; influence d'une isométrie, d'une homothétie. Comparaison des aires et des volumes pour deux figures semblables. Projection orthogonale d'une aire plane.

Approximation de l'aire dans le plan et du volume dans l'espace pour des ensembles plus généraux par construction de figures élémentaires contenues et contenant (on admettra l'existence de l'aire et du volume en question).

La dérivée $\frac{dV}{dz}$ du volume $V(z)$ compris entre le plan de cote z et un plan fixe est égale à l'aire $S(z)$ de la section du corps par le plan de cote z.

Calcul au moyen des primitives des volumes du parallélépipède, des prismes, de la pyramide, du tronc de pyramide à bases parallèles, du cylindre et du cône de bases parallèles. Calcul de l'aire latérale.

7. *Sphère.* — Symétries, plans tangents. Intersection de sphères, droites et plans. Effet d'une similitude. Cône et cylindre circonscrits.

Aire de la zone, aire de la sphère. Volume de la sphère.

8. *Eléments de géométrie cotée.* — Projection et cote d'un point. Rabattement d'un plan vertical sur le plan horizontal. Emploi de projections verticales auxiliaires.

Projection et détermination d'une droite. Angle avec le plan horizontal. Distance de deux points.

Droites concourantes ou parallèles.

Détermination d'un plan ; horizontales et lignes de pente.

Rabattement d'un plan sur le plan horizontal. Angle de deux droites.

NOTA. — On conservera le plus possible le contact avec le concret ; l'utilisation de films (fixes ou mobiles) est à recommander, ainsi que l'usage de modèles simples construits par les élèves (voir documentation existant à ce sujet en France et surtout à l'étranger). De grandes difficultés de compréhension peuvent être levées en quelques instants auprès de certains élèves par un matériel convenable ou plus généralement grâce au recours à une situation concrète.

Classe de Mathématiques Elémentaires (9 heures par semaine)

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES.

Les programmes établis sont limitatifs, en particulier en ce qui concerne la géométrie. Ils doivent évidemment être étayés par de nombreux exercices, mais ceux-ci ne doivent pas être intégrés dans le cours, ni alourdir l'effort de mémoire demandé aux élèves.

La géométrie est destinée à intéresser les meilleurs éléments, et à stimuler en eux l'esprit de recherche ; pour les autres, elle doit être une initiation au concret, et s'accompagner, à cet effet, d'exercices appropriés. En aucun cas, elle ne doit constituer un barrage, et on ne doit pas détourner des carrières scientifiques les élèves qui paraissent moins doués d'intuition géométrique. Dans l'enseignement de la géométrie, on ne s'attachera pas tant à telle ou telle propriété particulière, quelle que soit son esthétique, qu'à former le raisonnement de l'élève, et à l'amener à réfléchir sur les règles de la logique, les notions d'égalité et d'équivalence, de condition nécessaire et suffisante, d'inclusion, d'opération, de transformation.

L'algèbre, quoique faisant l'objet de programmes plus restreints, devra être considérée comme une partie très importante des Mathématiques, et comme étant celle qui deviendra primordiale dans la suite des études, car elle renferme les germes de l'algèbre proprement dite, et de l'analyse. Les éléments de géométrie analytique donnés dans les classes terminales devront en particulier faire comprendre à l'élève que la notion de coordonnées a donné naissance à des méthodes générales en géométrie. De façon générale, les matières enseignées devront être « pensées » par le professeur dans la perspective des applications que l'élève aura à aborder dans sa vie d'étudiant ou de technicien.

Enfin, et ceci est extrêmement important, les élèves des sections littéraires A et B ne devront en aucun cas se sentir exclus des carrières scientifiques.

Il serait souhaitable que les programmes d'algèbre des sections littéraires soient aussi proches que possible de ceux que nous préconisons pour les sections scientifiques, de manière, qu'avec des leçons supplémentaires, les élèves littéraires puissent rattraper leurs lacunes et entrer en Mathématiques Elémentaires, ou, en tout cas, en Sciences Expérimentales.

ALGÈBRE ET ARITHMÉTIQUE.

1. *Les ensembles.* — Révision des opérations sur les ensembles. Relations d'équivalence et relations d'ordre. Applications. Analyse logique d'un raisonnement (uni-

quement sur des exemples). Utilisation des symboles $\forall$ (quel que soit) et $\exists$ (il existe). Négation d'une proposition.

2. *Nombres entiers.* — L'ensemble des entiers quelconques. Division entière. Congruences. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. Nombres premiers, décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Systèmes de numération de base a, divisibilité par $a-1$ et $a+1$. Ces théories ne doivent pas faire l'objet de problèmes trop théoriques. Combinaisons et factorielles, C_n^p , n !

3. *Nombres rationnels.* — Introduite par la mesure des grandeurs, la notion de fraction doit s'en dissocier. On introduit les couples (p, q) de deux nombres entiers, $q \neq 0$, et on établit la relation d'équivalence $(p, q) = (p', q')$ si $pq' = qp'$; un nombre rationnel est une classe d'équivalence (1). Propriétés des nombres rationnels.

4. *Les nombres réels.* — Fractions décimales. Approximation, erreurs. Notion de nombre irrationnel (sans rigueur, comme nombre décimal illimité). Propriétés (admises).

5. *Notions de groupe, anneau, corps.* — Définitions et exemples ; l'anneau des entiers, le corps des nombres rationnels, ou des nombres réels.

6. *Nombres complexes.* — On introduit le nombre $a + ib$ comme un ensemble de deux nombres réels repérant un point du plan. Forme trigonométrique

$$r(\cos u + i \sin u).$$

Addition, multiplication ; le corps des nombres complexes. La multiplication par un nombre complexe présentée comme similitude. Applications trigonométriques : retrouver les formules donnant $\cos(u+v)$ et $\sin(u+v)$. Formules de Moivre. Application à la résolution de l'équation du second degré à coefficients réels. Equation $x^n = 1$.

7. *Progressions arithmétiques et géométriques.*

8. *L'anneau des polynômes.* — Formule du binôme $(a+b)^n$. Division des polynômes suivant les puissances décroissantes. Reste de la division par $x - a$. Identités remarquables. Exercices comportant des indices. Le théorème de d'Alembert et la décomposition d'un polynôme en facteurs seront donnés à titre indicatif et montrés sur des exemples.

TRIGONOMÉTRIE.

Programme inchangé. Toutefois, on abrégera le temps consacré aux résolutions de triangles, pour faire place à des exercices relatifs aux nombres complexes.

Le calcul des médianes, hauteurs, bissectrices, rayons des cercles inscrits ou ex-inscrits à un triangle n'est pas au programme.

MÉCANIQUE.

Dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable. Dérivée d'une somme, d'un produit scalaire ou vectoriel. Vecteur vitesse et vecteur accélération par rapport à un repère. Composition des vitesses (avec démonstration par la dérivée des fonctions vectorielles). Mouvements particuliers : mouvement rectiligne uniformément varié, mouvement circulaire, mouvement vibratoire, composantes de la vitesse en coordonnées polaires dans le plan ; mouvement d'un point dans le plan considéré comme composé d'une rotation du rayon vecteur et d'un mouvement du point sur le rayon vecteur. Centre instantané de rotation dans le plan.

---

(1) La notion de grandeur mesurable ne doit faire l'objet d'aucune considération philosophique.

(On ne parlera pas de l'hodographe ; on n'étudiera pas le mouvement :

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta),$$

qui est un exercice de trigonométrie).

Loi fondamentale de la dynamique $\vec{F} = m\vec{\gamma}$. Etude du mouvement parabolique d'un point pesant dans le vide.

ANALYSE.

1. *Notion de fonction, idée sommaire de la continuité.* — Représentation graphique, utilisation de changements d'axes rectangulaires et de changements d'échelle. Résolution graphique d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues, ou d'inéquations.

2. *Dérivée.* — Application à la variation des fonctions

$$y = ax^2 + bx + c,\ x^3 + px + q,\ \frac{ax+b}{cx+d},\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x.$$

L'étude de la variation du rapport de deux trinômes n'est pas au programme.

Application à la résolution graphique d'équations simples. Dérivée de la fonction inverse d'une fonction monotone.

3. *Coordonnées polaires.* — Construction de courbes simples : $r = a\cos u$, $r = au$, $r = a/\cos u$, $r = a/u$.

Construction de la tangente par application de la cinématique.

4. *Primitives.* — Primitives des fonctions simples. Utilisation pour le calcul des aires et des volumes. Application : aire et volume de la sphère, de la zone sphérique, du segment sphérique.

On admettra toujours les notions d'aire et de volume, l'existence de primitives d'une fonction continue, et le fait qu'une fonction de dérivée nulle est une constante.

Fonction logarithme comme primitive de $1/x$, et fonction exponentielle. Usage des tables de logarithmes et de la règle à calcul.

GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

1. *Les vecteurs.* — Axiomes simples de la géométrie à deux et trois dimensions. Droites et plans, divers modes de définition, parallélisme et orthogonalité. Notion de vecteur. La relation d'équivalence : « deux vecteurs sont équipollents » ; une classe d'équivalence est un vecteur libre. Axiome des espaces vectoriels ; on admettra l'existence de bases et l'invariance du nombre d'éléments de la base ; exemples tirés de l'analyse (espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant m$) ; les vecteurs d'un plan (resp. de l'espace à trois dimensions) forment un espace vectoriel à deux (resp. 3) dimensions. Trièdres de références, coordonnées d'un point et d'un vecteur. Trièdre trirectangle, coordonnées rectangulaires ; expression de la distance de deux points par leurs coordonnées, équation d'un plan, d'une sphère. Equation d'une droite dans le plan et d'un plan dans l'espace ; parallélisme et orthogonalité. Définition des trièdres supplémentaires (l'étude des inégalités entre faces et dièdres d'un trièdre est laissée à l'appréciation du professeur, et ne doit pas être exigée au Baccalauréat).

Produit scalaire. Orientation de l'espace. Produit vectoriel. Expression en coordonnées rectangulaires.

2. *Isométries et similitudes.* — Isométries du plan : translation, rotation, propriétés caractéristiques. Expressions dans un système de coordonnées rectangulaires, et à l'aide des nombres complexes. Notion de groupes de transformations. Homothétie, étude analogue. Groupe des homothéties et translations, par $\overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM} + \vec{B}$. Groupe des similitudes planes ; utilisation des nombres complexes.

Diverses sortes de symétrie (plan et espace). Composition de deux symétries par rapport à deux points, deux plans, deux droites situées dans un même plan.

Les isométries dans l'espace. Etude de cas particuliers : translation, rotation, déplacement hélicoïdal.

Homothétie dans l'espace. Ensembles semblables.

3. *Divisions et faisceaux harmoniques. Faisceaux de cercles. Inversion.* — Division harmonique sur une droite, faisceau harmonique de droites dans le plan. Relation homographique et involutive ; points fixes.

Puissance d'un point par rapport à un cercle et à une sphère. Expression analytique : $P(M) = x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d$. Axe radical de deux cercles, plan radical de deux sphères. Faisceau de cercles et de sphères, expression analytique $C + tC' = 0$. Diverses sortes de faisceaux. Les cercles passant par deux points fixes ; arcs capables d'angles orientés de droites (définis à $k\pi$ près). Un cercle d'un faisceau à points limites est le lieu des points dont les distances à ces points sont dans un rapport donné. Cercles et sphères orthogonaux. Faisceaux de cercles orthogonaux.

Polaire d'un point par rapport à un cercle, plan polaire par rapport à une sphère.

Inversion dans le plan (ou dans l'espace). Inverse d'une droite (d'un plan), d'un cercle (d'une sphère). L'inversion conserve les angles, avec changement de signe (étude dans le plan seulement). Etude de la transformation définie dans le plan complexe par $z' = \frac{az + b}{cz + d}$. Dans l'espace : projection stéréographique.

4. *Coniques.* — Définition, à partir des deux foyers, de l'ellipse et de l'hyperbole. Définition commune aux trois coniques par foyer et directive. Equivalence des définitions. Equation d'une conique rapportée à ses axes, équation d'une parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

Intersection avec une droite, traitée analytiquement ; tangente en un point, asymptotes, par l'analytique ; la propriété de la tangente (bissectrice des rayons vecteurs) est une application de la cinématique. L'intersection d'une droite et d'une conique par la règle et le compas n'est pas au programme.

Ellipse considérée comme projection du cercle.

Les sections planes des cônes et cylindres de révolution sont facultatives.

ASTRONOMIE.

Programme inchangé, mais allégé de la partie descriptive, qui pourrait être traitée en Troisième.

Pas de géométrie descriptive, ni de géométrie cotée.

IV. DOCUMENTATION ET BIBLIOGRAPHIE

Henri Poincaré et Paul Valéry (autour de 1895), une plaquette, par André Bellivier.

Notre Collègue Bellivier, professeur de Mathématiques au Lycée Condorcet, avait antérieurement publié un ouvrage sur « Henri Poincaré ou la vocation souveraine » (dans la collection *Vocations*, Gallimard, éditeur), nourri d'une documentation originale puisée dans les archives de la famille du grand mathématicien. Dans la préface de ce livre, allusion était déjà faite aux sociétés secrètes des poètes et des mathématiciens.

Notre Collègue Bellivier est particulièrement bien placé pour établir les liaisons entre ces ensembles dont les profanes croient l'intersection vide. Et il nous donne la preuve du contraire en montrant, par quelques textes bien choisis, quelle admiration le jeune Valéry (c'était en 1895) vouait au grand savant.

Citons seulement ce rapprochement : « Une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes, ce sont des syllogismes placés dans un certain ordre, et l'ordre dans lequel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ces éléments eux-mêmes. » (Henri Poincaré). « L'homme de génie est une chose qui met ou trouve certaines choses dans un certain ordre et qui en a l'habitude. » (Paul Valéry).

L'intéressante et élégante plaquette de M. Bellivier nous fait souhaiter que notre Collègue poursuive ses recherches. On sait que les *Cahiers*, de Paul Valéry sont en cours de publication ; les critiques littéraires se sont parfois sentis gênés devant de nombreuses réflexions mathématiques notées par le poète. Pourquoi M. Bellivier ne nous donnerait-il pas une analyse de ces remarques ? Je ne sais si les poètes en tireraient profit, mais je suis bien certain que tous ceux qui cultivent tant soit peu les Mathématiques y puiseraient des idées nouvelles.

G. W.

Les films de géométrie animée.

Ces films, réalisés par M. Nicolet, et distribués par « Mathematics Films C° », 225 Highstreet, Hampton Hill (Angleterre), ont déjà été cités dans le *Bulletin* 185, p. 377. Des erreurs de traduction ayant été commises, nous en publions la liste une nouvelle fois.

1. — Par trois points passe toujours un cercle et un seul.
2. — Lieu du centre d'un cercle mobile tangent à deux cercles concentriques.
3. — Lieu du centre d'un cercle mobile tangent intérieurement à un cercle fixe et passant par le centre de celui-ci.
4. — Lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés passent par deux points fixes.
5. — Lieu d'où l'on voit un segment de droite sous un angle constant.
6. — Théorème relatif aux bissectrices intérieures d'un triangle.
7. — Théorème relatif aux bissectrices extérieures d'un triangle.
8. — Angles inscrits et angles au centre.
9. — Un cercle tourne autour d'un point de sa circonférence. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée.
10. — Construction du pentagone, à partir du rayon du cercle circonscrit.
11. — Le partage d'un segment en moyenne et extrême raison détermine un pentagone.
12. — Théorème d'Eudoxe.
13. — Lieu d'où l'on voit deux cercles sous des angles égaux.

14. — Hypocycloïde dans laquelle le rayon du cercle fixe est le double du rayon du cercle mobile.
15. — Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe de l'axe des ordonnées à une famille de cercles tangents à l'origine, à l'axe des abscisses.
16. — Polaire d'un point variable par rapport à un cercle fixe.
17. — Lieu d'un point fixe d'un segment de droite de longueur donnée dont les extrémités décrivent un angle droit.
18. — Lieu du centre d'un cercle variable tangent intérieurement à un cercle fixe et passant par un point fixe.
19. — Lieu des centres des cercles tangents extérieurement à un cercle fixe et passant par un point fixe.
20. — Lieu du centre d'un cercle variable tangent à une droite fixe et passant par un point fixe.
21. — Lieu du centre d'un cercle variable tangent à une droite et orthogonal à un cercle fixe.
22. — Définition générale des coniques comme lieux du centre d'un cercle variable tangent à un cercle fixe et passant par un point fixe.

Une série complète de ces films est à la disposition des Collègues dans chacune des Cinémathèques académiques de l'Enseignement public.

Matériel pour l'enseignement de la géométrie dans l'espace

Pour satisfaire diverses demandes de renseignements nous reproduisons ici des adresses utiles :

— *Géo-Montage* (49, boulevard Diderot, Paris, 12e) : ensemble de tiges colorées, en matière plastique, faciles à assembler, grâce à une gomme spéciale.

— *Le stéréographe universel* (B. Delugas, 13, rue de Brantôme, Paris, 3e) : trièdre trirectangle formé de trois plateaux carrés ; chaque plateau comporte plusieurs épaisseurs de toile métallique tendue au travers desquelles des tiges métalliques peuvent être piquées dans toutes les directions.

— *Assemblo* (25, rue Garnier, Neuilly-sur-Seine) : plaques ayant formes de carrés, de rectangles, de triangles rectangles ou équilatéraux qui peuvent être assemblées par des tiges métalliques.

A travers les revues

REVUE D'HISTOIRE DES SCIENCES, tome X, n° 3 (juillet-sept. 1957) : Ch. Brunold : Enseignement scientifique et Histoire des sciences. — L. Auger : Les idées de Roberval sur le système du monde. — R. Lenoble : Roberval, « éditeur » de Mersenne et du P. Niceron.

MATHEMATICA ET PAEDAGOGIA, n° 12 : J. Teghem : La statistique mathématique. — Z. Krygowska : Le danger du formalisme et du verbalisme dans l'enseignement de l'algèbre. — J. Nachtergaele : Ambitions et responsabilités du professeur de Mathématiques. — L. Jeronnez, G. Boigelot et G. Hirsch : Les programmes de Mathématiques. — L. Derwidue : L'algèbre de l'ingénieur.

MATHEMATICS TEACHING (Bulletin de « Association for teaching aids in Mathematics », London), n° 5 (nov. 1957) : Dodwell : The evolution of number concepts in the child. — C. Gattegno : Can American education teach us anything ?

LES HUMANITES SCIENTIFIQUES, octobre et novembre 1957 : J. Legrand : Une notion d'algèbre moderne et ses applications.

L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, 2e série, tome III, fascicule 4 : H. BEHNKE : La tension entre l'Enseignement Secondaire et l'Enseignement universitaire en Allemagne. — J. FAVARD : Sur les quadratures mécaniques. — D. HARKIN : On the Mathematical Work of François Edouard Anatole Lucas. — G. WALUSINSKI : Au pays de Clairaut et de Bourbaki.

Documents et matériel pour l'enseignement de l'astronomie

1° *Annuaire du Bureau des Longitudes*, 1958, Gauthier-Villars, 2 000 F. Cet ouvrage doit figurer dans toutes les bibliothèques scientifiques de nos établissements.

2° Rappel des avantages offerts à ses membres par la Société Astronomique de France :

SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE

Fondée en 1887 par Camille FLAMMARION — Reconnue d'utilité publique en 1897

Siège social : 28, rue Serpente, Paris VIe

La Société Astronomique de France est ouverte à toutes les personnes qui s'intéressent à l'Astronomie. La S.A.F. groupe ainsi plusieurs milliers d'amateurs et la presque totalité des astronomes professionnels de France, ainsi que de nombreux savants d'autres pays.

Conditions d'adhésion comme *membre titulaire :*

Droit d'inscription	200 F
Cotisation annuelle :	
— Paris, Seine, Seine-et-Oise, Seine-et-Marne	1 800 F
— France et Union Française, sauf région parisienne	1 500 F
— Autres pays	2 300 F

Paiement par virement au C.C.P. de la S.A.F. : Paris 1733.

Avantages réservés aux membres titulaires :

Service de la revue mensuelle : *L'Astronomie.*

Bibliothèque (service de prêt à domicile), séances mensuelles, cours et conférences, observatoire, au siège de la S.A.F.

POUR L'ENSEIGNEMENT

1° Inscription collective.

Une classe ou un groupe d'élèves peut être inscrit collectivement comme membre titulaire, aux conditions ci-dessus, et avec les mêmes avantages pour l'ensemble du groupe. La collection de la revue constitue, dans la bibliothèque de classe, la meilleure documentation astronomique d'actualité en français.

2° Section spéciale des Etudiants.

Les élèves des Ecoles et les Etudiants peuvent adhérer *individuellement* à la section spéciale des Etudiants de la S.A.F.

Conditions d'adhésion :

Droit d'inscription	140 F
Cotisation annuelle	250 F

Les Etudiants ont droit aux mêmes avantages que les membres titulaires (bibliothèque, conférences, cours et observatoire), mais, au lieu de la revue complète, ils reçoivent mensuellement une revue de douze pages, avec couverture glacée et illustrée d'une belle photographie astronomique, qui contient : des grandes études sur les questions importantes de l'astronomie contemporaine, rédigées par les meilleurs spécialistes, sous la direction de M. Paul COUDERC, Astronome titulaire à l'Observatoire de Paris ; de plus, la revue contient des commentaires sur les documents photographiques présentés, la Revue des Constellations conçue pour aider les amateurs, et les indications sur les observations importantes du mois. Les articles de la Revue des Etudiants, se retrouvent dans la Revue des titulaires ; mais ils ont été spécialement écrits pour les Etudiants.

Notes pratiques pour les observateurs débutants, par Jean TEXEREAU.

Ouvrage recommandé à tous ceux qui veulent, même sans instruments spéciaux, faire des observations intéressantes.

En vente au siège de la Société Astronomique de France. Prix : 300 F (ouvrage offert aux nouveaux adhérents de la S.A.F.).

« NOTES PRATIQUES » et Revue de la section des Etudiants, forment la documentation indispensable de tous les jeunes qui veulent observer le ciel et comprendre ses phénomènes.

Renseignements sur la section Etudiants de la S.A.F., au siège de la S.A.F., ou en écrivant au Secrétaire chargé de cette section : G. WALUSINSKI, 26, parc de la Bérengère, Saint-Cloud (S.-et-O.).

Au sommaire des derniers *Bulletins-Etudiants* :

J. LEQUEUX : Les méthodes d'étude en radio-astronomie. — R. BOUIGUE : Quelques réflexions sur l'étude des étoiles rouges. — G. WALUSINSKI : Actualité de l'enseignement de l'astronomie. — F. BALDET : Les comètes. — P. COUDERC : Le satellite artificiel. — R. CANAVAGGIA : Les Céphéides.

A noter qu'en plus des photographies de couverture, les six numéros de juin à décembre 1957 contiennent sept planches hors-texte : taches du Soleil, comète de Arend, éclipse de Lune, région d'Ophiacus.

L'importante conférence de M. Paul COUDERC sur le satellite artificiel a paru *in extenso* dans *L'Astronomie* de décembre 1957.

Un théodolite de démonstration :

Mme LANDRIEUX, professeur au Lycée de jeunes filles de St-Quentin, a publié dans notre *Bulletin* (n° 141, mai 1951), une étude où elle donnait toutes les précisions relatives à cette construction. Notre Collègue a eu l'obligeance de me donner quelques « tirés à part » qui lui restaient. Je l'en remercie. Je tiens ces tirés à part à la disposition des Collègues qui ne retrouveraient plus le *Bulletin* 141.

G. W.

V. INFORMATIONS ET DOCUMENTS OFFICIELS

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES (Hommes)
Concours de 1957

Rapport de M. l'Inspecteur général DONTOT, Président du jury

Le jury était composé de M. DONTOT, Inspecteur général de l'Instruction publique, président ; M. COMBES, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse, vice-président ; M. Y. MARTIN, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes ; M. THÉRON, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; M. EUVRARD, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Hoche à Versailles, secrétaire du jury.

EPREUVES ECRITES

Elles ont eu lieu les 20, 21, 23 et 24 mai, de 8 heures à 15 heures.

Le nombre des candidats inscrits était de 234, en augmentation (+ 4) sur le nombre des inscrits en 1956.

Le nombre des candidats présents à la première composition (Mathématiques Elémentaires), était de 201, en augmentation (+ 5) sur celui de 1956. Trente-trois candidats (34 en 1956) ont donc renoncé à se présenter ; ce sont 16 élèves des C.P.R., 15 professeurs en exercice, 1 moniteur, 1 adjoint d'enseignement, 1 candidat au service militaire.

Le nombre des candidats ayant remis les quatre compositions écrites est de 187 en augmentation (+ 9) sur celui de 1956. Nous ne tiendrons compte, dans les considérations qui suivent, et en particulier pour le calcul des pourcentages, que de ces 187 candidats. Parmi les 14 candidats qui ont abandonné au cours des épreuves écrites, nous dénombrons 7 élèves des C.P.R., 3 professeurs, 2 élèves de l'E.N.S. de St-Cloud et 2 étudiants.

Le jury s'est réuni au Lycée Saint-Louis, le 24 juin, pour fixer la liste des admissibles. Comme l'année dernière, les candidats ayant totalisé pour les quatre compositions écrites plus de 25 points sur 80, c'est-à-dire ayant une moyenne supérieure à 6,5 sur 20, ont été proposés pour l'admissibilité. Soixante-neuf candidats au lieu de soixante-deux en 1956 (+ 7) ont donc été déclarés admissibles, soit 36 % des candidats ayant remis quatre compositions écrites. Rappelons qu'il était de 18 % en 1950.

Le jury espérait pouvoir proposer un plus grand nombre de candidats pour l'admissibilité. Il est nécessaire, en effet, de recruter un nombre d'agrégés aussi grand que possible, sans, bien entendu, abaisser le niveau du concours et il est bien clair que pour obtenir ce résultat, il faut augmenter d'abord le nombre des admissibles. Un nouvel effort a donc été fait cette année pour proposer aux candidats des problèmes accessibles, dont les premières parties au moins pouvaient être résolues avec du bon sens et des connaissances générales. L'expérience a démontré une fois de plus l'exactitude de la remarque que nous avons faite dans le rapport de l'an dernier, savoir : que la plus ou moins grande difficulté des épreuves n'a de répercussion que sur les notes des candidats les meilleurs, et ne modifie pas celle des moins bons. Le total des notes obtenues par les candidats, au-delà du 40e, sont, pour un rang déterminé, les mêmes chaque année, à un ou deux points près.

Il est donc vain d'espérer que l'on augmentera sensiblement le nombre des admissibles, en maintenant la structure actuelle du concours, soit en simplifiant les épreuves, soit en les cotant plus généreusement. Le moment paraît donc venu de toucher à cette structure elle-même, si respectable que soient des traditions éprouvées ; la Commission d'études des problèmes relatifs au recrutement des professeurs des disciplines

scientifiques, qui siège au Ministère de l'Education Nationale, a envisagé de diminuer la durée de chaque épreuve, ramenée de sept à six heures et d'en réduire le nombre à trois : une épreuve d'arithmétique, géométrie et géométrie analytique, une épreuve d'analyse portant sur les programmes de la propédeutique et de la licence, une épreuve de mécanique. Nous pensons ainsi permettre à des candidats n'ayant pu, au cours de leur scolarité, fréquenter les classes de Spéciales, de franchir plus aisément le barrage de l'admissibilité ; il serait également souhaitable que l'épreuve de calcul numérique soit intégrée dans les épreuves écrites, avec son modeste coefficient 1, parce qu'elle permet à un candidat soigneux et intelligent de gagner aisément une dizaine de points récompensant des qualités non négligeables.

Il est malheureusement certain que l'augmentation du nombre des admissibles n'entraîne pas automatiquement une augmentation sensible du nombre des reçus ; le concours de 1957 confirme cette constatation déjà faite dans les rapports antérieurs. Si la liste d'admissibilité avait été arrêtée au 44e candidat classé (ce candidat avait 7,5 de moyenne), la liste d'admission aurait comporté 34 noms ; si elle avait été arrêtée au candidat classé 58e (6,9 de moyenne), la liste d'admission aurait comporté les 42 noms des agrégés de 1957, car aucun admissible, totalisant moins de 7 de moyenne à l'écrit, n'a pu, au cours des épreuves orales, faire la preuve qu'il avait les connaissances et les qualités d'un agrégé.

⁂

Le total des notes obtenues par les admissibles est compris entre 26,5 et 65 (il était en 1956 compris entre 26 et 67) : la moyenne sur 20 est donc comprise entre 6,6 et 16,25. Nous noterons donc, cette année encore, le très large éventail de la notation et la bonne qualité des copies remises par les meilleurs candidats. Seize d'entre eux (contre 14 en 1956) ont une moyenne supérieure à 10 sur 20 et 37 (contre 31 en 1956) ont une moyenne supérieure à 8. L'amélioration des résultats obtenus par les meilleurs est donc sensible et traduit la qualité incontestable de la préparation.

EPREUVES ORALES

Elles ont eu lieu au Lycée Saint-Louis. La liste d'admissibilité a été signée le lundi 24 juin au matin et publiée l'après-midi ; les candidats ont été répartis en deux séries ; l'appel des candidats de la première série a été fait au Lycée Saint-Louis le mercredi 26 juin à 17 heures et celui des candidats de la seconde le mardi 9 juillet à 10 heures.

Un des admissibles, élève d'un C.P.R., a renoncé à participer aux épreuves orales ; les 68 admissibles restants ont été, comme l'an dernier, répartis en cinq groupes, deux de douze candidats, un de quatorze et deux de quinze. Le mécanisme des épreuves orales a été exposé dans le rapport de l'année 1956 ; il a donné entière satisfaction en réduisant au minimum la durée du séjour à Paris de chaque candidat et en allégeant la tâche écrasante du jury. Deux candidats, un élève de Saint-Cloud et un professeur en exercice, ont déclaré, au cours des épreuves orales, qu'ils renonçaient à les poursuivre.

La moyenne des notes obtenues pour les leçons d'Elémentaires est de 12,7 contre 11,5 en 1956 ; celle des notes obtenues pour les leçons de Spéciales est inchangée aux environs de 10.

EPREUVES PRATIQUES

Elles ont eu lieu pour les deux séries le mardi 9 juillet, de 15 h 30 à 18 h 30 (Calcul numérique) et le mercredi 10 juillet de 8 h à 12 h (Epure).

Un candidat, qui avait répondu à l'appel le mardi matin, ne s'est pas présenté ; il a fourni ultérieurement un certificat médical grâce auquel il a évité d'être éliminé.

RESULTATS GENERAUX

Les totaux des notes obtenues par les admissibles ayant subi toutes les épreuves du concours sont compris entre 80 et 343 (au lieu de 84 et 304 en 1956). On constate une baisse très nette du total du dernier classé par rapport aux concours de 1954 (113) et de 1955 (98), due à l'augmentation du nombre des admissibles.

Il a paru possible de proposer pour le titre d'agrégé les 42 premiers admissibles, ce qui fixe à 9,15 au lieu de 9,35 en 1956 la moyenne sur 20 des derniers reçus. Le pourcentage des reçus par rapport au nombre des candidats ayant remis les quatre compositions écrites est de 22 %, contre 21 % en 1956. L'augmentation du nombre des admissibles, 69 au lieu de 62, a donc modifié peu sensiblement le pourcentage des reçus ; par contre, elle a permis de faire trois agrégés de plus.

Il nous a paru nécessaire, avant de tirer une conclusion de ces renseignements statistiques, de les résumer sous la forme de deux tableaux. Le premier indique les résultats obtenus par les candidats pour lesquels l'agrégation joue le rôle d'un concours de recrutement. Ces candidats, élèves des Ecoles Normales Supérieures, déjà sélectionnés par des concours, étudiants et assistants de Facultés, sont placés dans les conditions les meilleures pour préparer l'agrégation ; ils sont à proximité d'une préparation et libérés, pour la plupart, du souci d'une occupation secondaire ;

le voici :

	Candidats	Admissibles	Reçus
Elèves de l'E.N.S. Ulm	13	11	9
Elèves de l'E.N.S. Saint-Cloud	12	9	3
Elèves de l'E.N.S.E.T.	2	2	2
Etudiants	19	9	4
Assistants	6	4	3
	52	35	21

Le pourcentage des reçus est 41 %, très élevé par conséquent. Sur les 21 agrégés de cette catégorie, six ont été nommés professeurs dans l'Enseignement du Second Degré, et chargés d'une classe de Mathématiques Elémentaires de Lycée, deux sont au service militaire, deux (reçus 1er et 2e) dans l'Enseignement Technique, sept sont élèves de quatrième année d'Ecole Normale Supérieure.

Le second tableau indique les résultats obtenus par les candidats pour lesquels l'agrégation joue le rôle de concours de changement de catégorie ; la plupart sont des professeurs titulaires ou délégués dans le Second Degré ou l'Enseignement Technique et ont par conséquent la charge d'un enseignement dans des établissements souvent éloignés d'une ville de Faculté ou de communications difficiles avec celle-ci. Ils assurent leur préparation, soit en se rendant le mercredi ou le jeudi dans cette ville de Faculté, soit en suivant les cours de préparation organisés par le Centre National d'Enseignement par correspondance. Voici ce second tableau.

	Candidats	Admissibles	Reçus
Professeurs	114	28	17
C.P.R.	15	5	3
Adjoints d'enseignement ou maîtres d'internat	5	1	1
Service militaire	1	0	0
	135	34	21

Le pourcentage des reçus n'est plus que de 15,5 %, ce qui s'explique aisément. Les agrégés de cette seconde catégorie, à l'exception de deux d'entre eux appelés au service militaire, ou bien ont gardé le poste qu'ils occupaient, ou bien ont accepté une mutation pour en prendre un plus important ; l'un d'eux a été nommé dans une classe préparatoire à l'Institut National Agronomique.

Le nombre (51) des candidats de la première catégorie — nous les appellerons étudiants — est, depuis quelques années à peu près invariable ; il était déjà de 51 en 1956. Il représente le quart de la totalité des candidats. Il n'est pas inutile d'observer que, presque tous les candidats étudiants résident à Paris ; neuf d'entre eux seulement fréquentent les préparations organisées dans les Facultés de province. La clientèle de ces dernières est presque exclusivement composée de professeurs de l'Enseignement du Second Degré, et si, pour une raison quelconque, l'agrégation cessait d'être le concours de recrutement de l'Enseignement du Second Degré, alimenté par les 148 candidats professeurs en exercice, les Facultés de province pourraient abandonner la préparation de l'agrégation.

Il n'est qu'à moitié surprenant de constater qu'à une époque où les Facultés des Sciences sont envahies par une foule d'étudiants, il ne se trouve parmi ceux-ci qu'une petite vingtaine de candidats à l'agrégation de Mathématiques. Il ne faut pas oublier qu'il n'existe pour ainsi dire plus de licenciés d'enseignement de Mathématiques dans les Facultés. En 1956, le grade de licencié d'enseignement de Mathématiques a été collationné par l'ensemble des Facultés à 254 candidats et candidates ; parmi ceux-ci figurent les élèves des deux Ecoles Normales Supérieures, les jeunes filles qui se présentent à l'agrégation féminine de Mathématiques, les étudiants et étudiantes qui ne sont pas candidats aux fonctions d'enseignement. Rien de surprenant, par conséquent à ce qu'il ne reste, en définitive, qu'un nombre infime de candidats à l'agrégation masculine et c'est bien là le caractère inquiétant des statistiques.

L'agrégation de Mathématiques présente l'apparence d'un concours florissant ; le nombre des candidats, celui des admissibles, celui des reçus ne diminue pas ; il augmente même légèrement. Mais cette augmentation est due à des aménagements techniques (la notable amélioration des préparations, en particulier), et qui permettent aux candidats les moins favorisés, les professeurs en exercice, de se présenter avec de plus grandes chances de succès. Ce qu'il conviendrait d'obtenir, c'est qu'un plus grand nombre d'étudiants, qui peuvent constituer dans le cadre des agrégés un apport neuf et de qualité, se présentent à l'agrégation et, pour cela, que les Facultés soient en mesure de conférer le grade de licencié d'enseignement de Mathématiques à dix fois plus de candidats qu'elles ne peuvent actuellement le faire.

Nous conclurons donc la partie de ce rapport, consacrée aux épreuves et à leur résultat, en disant qu'il n'y a pas de problème de l'agrégation de Mathématiques, mais un problème de la licence. Les agrégés de 1957 valent leurs aînés ; nous ne mettons pas un point final aux considérations qui précèdent sans rendre, une fois encore,

hommage aux professeurs qui, dans les Facultés, assurent la préparation ; c'est la qualité de celle-ci qui a permis au jury d'allonger, cette année encore, les listes d'admissibles et de reçus. Pour les allonger davantage encore, il ne faut compter que sur une augmentation sensible, que l'on peut d'ailleurs prévoir, de l'apport neuf en étudiants licenciés.

PARTIE TECHNIQUE

Rapports des correcteurs des compositions écrites.

Composition de Mathématiques Elémentaires

(Correcteur : M. Théron)

Le problème proposé était destiné à faire faire aux candidats une étude des coniques considérées comme transformées de cercles par perspective. La résolution de ce problème n'exigeait aucune érudition.

Dans la partie I on étudie les propriétés élémentaires d'une perspective de cercle : éléments de symétrie, intersection avec une droite, pôles et polaires.

Déjà, dans cette partie, une quarantaine de candidats ont commis des fautes graves dans la recherche des axes de symétrie droite d'une conique : constatant que la figure formée par le cercle (Γ_1) et le point de vue de S possède un plan de symétrie droite, ils en ont déduit que ce plan coupe le plan (P) selon un axe de symétrie droite de (C) !

Dans la question n° 3, ils ont donné la justification demandée sans voir clairement pourquoi cette justification était nécessaire : cette nécessité tient au fait qu'une courbe (C) peut *a priori* être regardée de plusieurs façons comme une perspective de cercle.

La partie II est consacrée à une étude du théorème de Pascal.

Dans le cas du cercle, étudié d'abord, l'énoncé fait distinguer deux cas de figure et guide les candidats qui, très nombreux, ont donné des démonstrations exactes mais plus ou moins lourdes.

La question suivante : passage du cas général à l'un des cas précédents, a été l'occasion, pour plus de 30 candidats, de fautes inexcusables : malgré les indications explicites du texte, ils se sont contentés de se ramener à l'un des cas particuliers seulement étudiés pour le cercle en affirmant que leur démonstration était complète.

La partie III est celle qui a classé les candidats valables, certaines figures étaient difficiles à rendre claires, les raisonnements étaient plus délicats. La troisième question n'a été comprise que par quelques-uns, car presque tous les candidats qui l'ont abordée (une trentaine) ont commis une faute de principe, leur raisonnement utilisant un point S, alors que l'existence de ce point découle de la solution de la troisième question.

La partie IV n'exigeait que de la réflexion : il suffisait de rapprocher les résultats déjà trouvés.

La partie V a été l'occasion, pour le candidat reçu premier au concours, de montrer ses qualités, sa solution est rédigée rapidement et elle n'est valable à coup sûr que dans le cas d'une hyperbole, mais le principe de la démonstration est d'une grande élégance et d'une grande simplicité.

Voici quelques renseignements statistiques : 201 copies furent corrigées, leurs notes vont de zéro à dix-neuf (notes attribuées chacune une fois).

La courbe de répartition des notes montre un maximum pour la note 2,5 attribuée 27 fois. La note médiane est comprise entre 4,5 et 5, donc 50 % des candidats ont obtenu une note inférieure à 5, et il figure parmi eux 11 admissibles dont 3 reçus (le plus mal noté a obtenu la note 2).

La courbe présente trois creux assez nets, le premier entre 10 et 11 isole 20 can-

didats notés au-dessus de 10 (avec 6 notes supérieures à 17,5 et 9 notes inférieures à 13) ; tous ces candidats, sauf un, non admissible, ont été reçus. Le second creux correspondant à la note 9, sépare du premier 13 candidats ayant obtenu les notes 3,5 ou 10, il figure parmi eux 12 admissibles dont 4 reçus. Enfin le troisième creux, moins net, correspond à la note 7. 59 candidats en tout ont obtenu une note supérieure ou égale à 7.

Ces résultats appellent quelques remarques :

1° La facilité relative de l'épreuve (l'énoncé guidait les candidats) a augmenté le nombre des bonnes notes, mais celui des notes assez bonnes reste toujours dangereusement petit : quatre candidats seulement ont plus de 12,5 et moins de 17.

2° La différence entre les meilleurs candidats et les plus mauvais d'entre eux est telle que le choix d'un sujet permettant de les classer tous s'avère très difficile : cette année il a été attribué trois fois la note 18, deux fois la note 18,5 et une fois la note 19, tandis qu'à l'autre extrémité de l'échelle la note 2 a été attribuée, comme on l'a dit, à un candidat reçu, les notes 2,5 et 3 ont été attribuées chacune une fois à un admissible, la note 3,5 à un reçu, la note 4 à trois admissibles, etc...

Enfin, un examen détaillé des notes permet d'étudier la corrélation entre la note obtenue par chaque candidat à l'épreuve d'Elémentaires et sa note moyenne d'écrit : il suffit avec du papier millimétrique de porter en abscisses la note d'Elémentaires par exemple et en ordonnées la note moyenne d'un même candidat.

On constate alors que la corrélation est assez serrée, et, d'autre part, que l'épreuve d'Elémentaires favorise statistiquement les bons candidats : parmi les 25 candidats ayant une moyenne d'écrit supérieure ou égale à neuf, 16 sont représentés par des points à droite de la première bissectrice, 9 seulement par des points à gauche.

Composition de Mathématiques Spéciales

(Correcteur : M. Euvrard)

Statistiques. — 195 copies ont été corrigées. Le barème adopté fut des plus favorables pour les candidats, puisqu'il a consisté à attribuer 20 à la meilleure copie qui est loin d'avoir traité en entier et correctement tout le problème. L'échelle des notes est donc relative, ce qui ne présente aucun inconvénient dans un concours destiné à classer les candidats.

En fait, en tenant compte de ce qu'on peut raisonnablement attendre, en sept heures de travail, d'un candidat honnête, la note du premier n'aurait pas dû excéder 13 ou 14. Malgré ce barème, la moyenne de l'épreuve n'atteint pas 5 (4,84) et 18 copies seulement ont obtenu une note supérieure à 10 (un 20, un 17, deux 16,5, un 16 et un 15 constituent le lot de tête dans lequel on décèle de solides qualités, soit d'intelligence, soit de méthode ou de soin, mais trop rarement exploités à fond). On en compte par ailleurs 58 qui n'ont pas dépassé la note 2,5 (sept 0, dont deux copies blanches ; quatre 0,5 ; onze 1 ; douze 1,5 ; quinze 2 et neuf 2,5).

L'épreuve est donc très faible, malgré un début du niveau de la classe de Mathématiques Supérieures, et le correcteur est stupéfait de constater que dix candidats n'ont pas su écrire l'équation de la polaire d'un point par rapport à l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = a^2$. On relève, en géométrie analytique, une faiblesse inquiétante chez la plupart des candidats.

Analyse du sujet et des principales fautes commises. — Il s'agissait de la question suivante : Etant données deux coniques (C) et (Γ) dans un plan, M un point variable de (C), (Δ) sa polaire par rapport à (Γ), (Δ) coupe (C) en deux points P et Q ; étude des conditions de décomposition de l'enveloppe des droites MP et MQ quand M parcourt (C). MP et MQ étant divisées harmoniquement par les deux coni-

ques, leur enveloppe est bien connue et est elle-même une conique. Une condition de décomposition de l'enveloppe est donnée dans tous les ouvrages classiques ; c'est celle qui figure à la section III, 4° du problème : (C) et (Γ) doivent posséder deux cordes communes distinctes telles que le pôle de l'une par rapport à (C) soit confondu avec le pôle de l'autre par rapport à (Γ). Une autre condition, plus commode pour la construction de (Γ) connaissant (C) (les deux coniques jouent des rôles symétriques), fait l'objet de l'étude proposée dans le problème. On y est conduit sans peine en partant du cas où MP et MQ passent par deux points fixes A et B et en analysant les positions relatives de (C), (Γ) et de l'enveloppe (E) de PQ obtenue quand M décrit (C).

C'est donc l'étude de cette enveloppe qui est d'abord proposée. Mais cette enveloppe étant dégénérée si A et B sont conjugués par rapport à (C), on a proposé l'étude de ce cas à part dans la section I. Cette étude conduit à d'intéressantes considérations, soit géométriques, soit analytiques, en introduisant un cercle attaché à chaque droite (D) du plan, sur laquelle figure une infinité de couples de points A, B conjugués par rapport à (C). Ce cercle (cercle de base du faisceau des sphères de diamètres AB) est le lieu des sommets S des cônes de base (C) possédant le plan S(D) comme direction de plan de sections cycliques. Quand (D) varie en restant parallèle à une direction fixe, ce cercle engendre une quadrique (Q), et l'ensemble des quadriques (Q) associées à toutes les directions (D) du plan de (C) forme un faisceau linéaire tangentiel de quadriques dont (C) est une conique focale.

L'étude de ces questions était demandée par des procédés géométriques et des procédés analytiques. Ces derniers ont eu fort peu de succès, les candidats ne sachant généralement pas calculer ou faisant des fautes parfois grossières (sans parler d'innombrables fautes de calcul proprement dites sans lesquelles les résultats obtenus auraient été exacts).

La plus caractéristique concerne la recherche de la condition pour qu'un cercle (K) (ici imaginaire) passe par les deux points d'intersection de la conique (C) et de la droite (D). Elle consiste, chez les uns, à éliminer x et y entre les équations des trois courbes, ce qui assure un point commun, mais non deux, et donne comme lieu de S une surface et non une courbe ; chez les autres, à écrire, avec des notations évidentes, $D^2 + \lambda C \equiv \mu K$, ce qui implique que le cercle est bitangent à (C) aux deux points situés sur (D), ce qui est évidemment en général impossible.

Très rares sont les copies où est analytiquement retrouvé le cercle lieu de S. Dans aucune, la discussion du nombre des quadriques (Q) passant par un point donné n'est abordée sérieusement. Un seul candidat a entrevu la possibilité pour les quadriques (Q) de former un faisceau tangentiel, car a-t-il justement trouvé, leurs sections par le plan de (C) forment un faisceau linéaire tangentiel de coniques. Mais la plupart se contentent d'affirmations données sans la moindre justification et souvent fausses : ainsi D′ est parallèle à D dans plusieurs copies... Les imprécisions sont nombreuses et trop de candidats se contentent de vagues aperçus qui les conduisent à de graves mécomptes (ne serait-ce que parce que l'examinateur n'apprécie pas du tout cela). Enfin, nous ne relèverons pas les maladresses de calcul (équation du cône (S), etc...) qu'on ne pourrait même pas pardonner à des débutants.

Nous n'avons pas parlé encore de l'introduction. C'est un cas simple de décomposition de l'enveloppe des droites MP, MQ en deux points à l'infini. Les calculs, très simples en paramétrant le cercle, s'étendent à l'hyperbole en échangeant le rôle des deux courbes par la transformation du paramètre φ en $i\varphi$, et les résultats restent valables (les points à l'infini sont les mêmes). Par contre, les transformations homographiques envisagées par certains candidats pour passer du cercle à l'hyperbole (par exemple, homothétie de centre O donnant du cercle (C) le cercle principal de l'hyperbole, suivie de l'homologie harmonique classique) ont le grave inconvénient de ne pas redonner le cercle (C) comme transformé de l'hyperbole, et on aboutit à ce

résultat curieux que si M était sur l'hyperbole, les droites MP et MQ correspondantes passeraient par des points fixes à distance finie !

La figure de ce cas a d'ailleurs paru bien connue des candidats qui ont donné à son sujet de nombreuses considérations géométriques. Mais très rares sont ceux qui sont allés assez loin dans le problème pour découvrir que le triangle formé par O et les points cycliques était le triangle IJK de la condition fondamentale de la section III, et ont compris que la considération de cette figure donnait rapidement la réciproque de cette condition. Encore fallait-il, puisque les calculs de cette introduction se bornaient aux éléments réels, justifier que le résultat s'étend au cas où les éléments sont imaginaires, éléments auxquels on peut aboutir, en partant des coniques (C) et (Γ) de la section III, et les transformant, par une transformation homographique, en une hyperbole équilatère et un cercle concentrique.

La section II étudie l'enveloppe de PQ quand A et B ne sont pas conjugués par rapport à (C). Il est évident géométriquement que PQ enveloppe une conique (E) bitangente à (C) aux deux points où AB coupe (C) [ou osculatrice à (C) si AB est tangente à (C)]. P et Q sont en effet en homographie sur (C) ; mais il n'est pas acceptable de justifier ce fait en disant que MA et MB sont en homographie, ce qui est faux.

Le calcul analytique était demandé en imposant les axes et en se plaçant dans un cas particulier simple ; ceci pour éviter l'emploi des coordonnées trilinéaires (qui constituent la méthode la plus normale, mais étaient à la limite du programme) et aussi pour préparer la solution analytique de la généralisation à l'espace demandée dans la section IV, 2° (mais aucun candidat n'a eu l'occasion de s'apercevoir de cela). Un autre système d'axes, peut-être plus naturel, est formé des asymptotes de (C), mais a l'inconvénient de ne pas être réel si (C) est une ellipse. Le correcteur a trouvé un certain nombre de calculs corrects, parfois un peu lourds, qui ont donné une sensible avance à ceux qui ont eu le courage de les faire.

La fin de cette section consistait en l'étude de la correspondance 2,2 existant entre les points A_i et B_i de (D) qui donnent naissance à la même enveloppe (E). Cette correspondance se décompose en deux homographies distinctes. Les raisons géométriques invoquées dans les quelques copies qui ont abordé ce point sont insuffisantes. Dire que l'on peut distinguer sur (C) les deux points P et Q qui, à partir de M fixé et de B_i permettent de construire les deux points A_i correspondants, n'a aucune valeur. Il faut prouver que cette séparation se fera effectivement *de façon rationnelle* dans les calculs. L'enveloppe des cercles de diamètre $A_iA'_i$ est alors classique (A_i et A'_i étant en homographie) : elle est formée de deux cercles symétriques par rapport à (D). Ce résultat n'a été obtenu que dans une seule copie.

La section III comporte l'étude de la condition nécessaire et suffisante pour que les droites MP et MQ passent chacune par un point fixe, et son équivalence à la condition classique déjà indiquée. L'étude géométrique de cette section, où l'on guidait étroitement les candidats, n'offre pas de grandes difficultés, et plusieurs ont obtenu des résultats convenables.

Enfin la section IV tente l'extension à l'espace des propriétés du plan qui viennent d'être étudiées.

M décrit donc une quadrique (H) et A, B, C étant trois points fixes, on appelle P, Q, R les points d'intersection de MA, MB, MC avec (H). Le problème propose d'abord l'étude du cas où l'on ne prend que deux points fixes A et B. Les propriétés du plan se généralisent facilement dans le cas où A et B sont conjugués par rapport à (H) (IV, 1°). On pourrait d'ailleurs poursuivre l'étude en cherchant par exemple, le lieu de la droite (D') associée à (D) dans chaque plan passant par (D) fixe, etc... (la droite (D') associée à (D) est celle définie à la section I).

Si A et B ne sont pas conjugués par rapport à (H), la droite PQ reste tangente à une quadrique bitangente à (H) aux deux points où AB coupe (H). C'est la généralisation dont on a parlé plus haut et dont la solution analytique est très simple en

utilisant les résultats de la section II. Géométriquement, on peut effectuer une transformation homographique qui donne de (H) une quadrique de révolution d'axe (D_1) transformée de (D) et le résultat est alors évident. Remarquons que cette quadrique est une des nappes focales de la congruence des droites PQ lorsque M décrit (H), A et B étant fixes (l'autre focale est la droite (D) elle-même) et que cette focale se réduit à la droite conjuguée de (D) par rapport à (H) quand A et B sont conjugués par rapport à (H).

Si, enfin, on prend trois points A, B, C, le plan PQR remplacera la droite PQ et on peut se proposer de chercher son enveloppe. Dans le cas simple proposé par l'énoncé, c'est une surface d'équation

$$A^{\frac{1}{3}}.X^{\frac{2}{3}}.+B^{\frac{1}{3}}Y^{\frac{2}{3}}+C^{\frac{1}{3}}Z^{\frac{2}{3}}=1$$

La recherche de son degré (ou ordre) constitue un intéressant exercice sur les fonctions symétriques de trois variables, et le résultat prouve qu'on ne peut, pour des quadriques, espérer des résultats simples analogues à ceux obtenus pour les coniques [étude, par exemple, du cône de sommet M ayant pour base la conique section de (H) par le plan PQR ; extension au cas où PQR est plan polaire de M par rapport à une deuxième quadrique (K)].

Composition de calcul différentiel et intégral

(Correcteur : M. Yves Martin)

Renseignements statistiques : 190 copies. Moyenne générale 6,45. Meilleures notes : 19,5 (2 fois) ; 16,5 (3 fois) ; 16 ; 15,5 (2 fois) ; 15 (2 fois) ; 14 (2 fois), etc... Les résultats globaux sont consignés dans le tableau suivant.

Note	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
Fréquence ...	15	45	29	42	24	11	12	6	4	2

35 copies ont une note supérieure ou égale à 10 ; mais 60 en ont une inférieure à 4, ce qui est difficilement acceptable si on pense qu'une résolution correcte des deux premières questions permettait de dépasser largement la note 10 ! La moyenne relative aux 69 admissibles est, cette année encore, de 10,1.

Les deux meilleures copies se distinguaient nettement du lot des suivantes. Leurs auteurs devaient se classer 1er et 3e à l'admissibilité comme au classement final. Le premier traita les trois premières questions et une très grande partie de la cinquième avec une autorité éclatante. L'autre candidat préféra s'attaquer à la quatrième question dans la solution de laquelle il put donner libre cours à son esprit inventif.

Le problème proposé cette année consistait en l'extension à certaines séries de propriétés valables pour les séries entières. Bien entendu, il n'était nullement question que les candidats fassent preuve d'une érudition quelconque, souvent plus nuisible qu'utile et l'énoncé était construit de façon à faire appel aux qualités d'intelligence beaucoup plus qu'à celles de mémoire.

La première question permettait par des méthodes et des justifications élémentaires, d'établir quelques propriétés des fonctions $f_n(z)$, utiles pour la résolution des questions suivantes. Bien qu'ils aient été mis en garde par le préambule, de trop nombreux candidats donnèrent, des opérations effectuées, des justifications superflues ou inexactes, telles que, uniformité de la convergence pour la multiplication des séries par le procédé de Cauchy ou même absolue convergence pour l'addition de séries terme à terme (dans plus de la moitié des copies !). Seule, la dernière question du dernier paragraphe était délicate : la convergence d'une série $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n t^n$

pour deux valeurs t_1 et t_2 de t, de modules distincts, entraîne bien la convergence uniforme de cette série pour $|t| = r$, r étant choisi entre $|t_1|$ et $|t_2|$, mais la somme n'y est pas, en général, égale à $g(z, t)$. Quelques copies mirent bien ce fait en évidence, allant même jusqu'à donner des contre-exemples simples.

Le début de la deuxième question permettait de vérifier les connaissances des candidats sur le rayon de convergence d'une série entière. Très peu de candidats donnèrent une démonstration et une formule correctes !

La majorité donna une formule, faisant intervenir de rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, conséquence d'une application inexacte de la perfide règle de d'Alembert. Dans la suite de cette deuxième question, bien peu de candidats se préoccupèrent du changement du contour d'intégration entraîné par le changement de variable proposé. Un plus petit nombre encore se soucia du domaine de validité de développement en série entière de t de $\left(\frac{t}{t^2+1}\right)^m$. Pour les fonctions $k(z) = e^{cz}$, il suffisait de poser $c = t + \frac{1}{t}$ pour se ramener aux résultats du 1°. Quelques candidats y ont pensé.

La troisième question était relative aux séries entières. Le théorème d'Abel était rappelé dans l'énoncé. Certains ont cru bon de le démontrer, mais en affirmant que la convergence simple de Σb_n entraînait sa convergence absolue, ce qui facilite évidemment beaucoup le travail ! ! Les formules (11) et (12), ainsi que leur extension et leur conséquence furent généralement établies correctement.

Trois candidats seulement abordèrent sérieusement la quatrième question dont l'énoncé était volontairement très succinct. Pourtant la donnée de l'étape intermédiaire permettait, soit de démontrer la formule donnée, soit de démontrer les propriétés demandées à partir de ladite formule, en associant à une série (6) une série entière convenablement choisie.

La cinquième question était destinée à permettre aux candidats arrêtés par la deuxième question d'acquérir quelques points supplémentaires. La décomposition de l'intervalle d'intégration suggérée par l'énoncé permettait d'obtenir une grande partie de résultats demandés par application de théorèmes élémentaires sur l'intégrale de Riemann. Les tentatives furent peu nombreuses et rarement couronnées de succès.

En conclusion, les résultats ont été tout à fait analogues à ceux de l'an passé, ce qui laisse supposer que le classement des candidats est largement indépendant de l'épreuve donnée, ce dont on ne peut que se réjouir. On retrouve, cette année encore, une grande dispersion dans les meilleures copies, ainsi qu'une trop grande accumulation dans les basses et les très basses notes. Dans leur préparation à l'épreuve d'analyse, la plupart des candidats auront donc intérêt à ne pas viser trop haut et à s'entraîner à traiter correctement, en temps limité, le premier tiers de l'épreuve ; s'ils y parviennent, ils seront en droit d'espérer que la composition d'analyse, loin de leur être fatale, pourra leur apporter quelques points toujours précieux.

Composition de Mécanique rationnelle

(Correcteur : M. Combes)

Le problème proposé, inspiré d'une expérience de Lord Kelvin, passait en revue quelques propriétés de l'effet gyroscopique. Il était divisé en deux parties. La première comportait d'abord des questions très faciles : former les équations du mouvement d'un système à trois paramètres, déterminer le torseur des forces de liaison, discuter l'aspect du mouvement pour certaines conditions initiales ; venait ensuite l'étude des propriétés spéciales qu'entraîne, pour les mouvements du système, une rotation très rapide du gyroscope qu'il contient. La deuxième partie était consacrée à l'étude de mouvements voisins d'un mouvement stationnaire, et fournissait un exemple de stabilisation par effet gyroscopique, celle-ci n'étant possible, conformément à un résultat général, que lorsqu'il y a un nombre pair de degrés d'instabilité.

Les candidats n'avaient d'ailleurs aucunement besoin de connaissances particulières sur ce sujet, les méthodes à employer pour résoudre le problème étant des plus classiques.

Voici les principales remarques et critiques que suggère la correction des copies.

Dans la partie I, la première question a été en général traitée correctement. Quatre candidats, pourtant, lisent mal l'énoncé et étudient un système qui n'est pas le système proposé. D'autres se trompent dès le calcul de la vitesse de G. Près du tiers enfin, au 1°, *b*, confondent les rotations de (S) et du carter.

Dans la deuxième question, de trop nombreux candidats se lancent dans d'effroyables calculs, utilisant les axes fixes pour écrire les équations fournies par les théorèmes généraux. D'autres pensent à utiliser un trièdre mobile, mais se contentent d'obtenir six composantes pour les éléments de réduction demandés, sans mettre en évidence leurs propriétés. Les théorèmes généraux doivent pourtant donner aussi les équations du mouvement, et il était évident que le système des forces de liaison avait un moment résultant nul par rapport à Oz, KK' et GZ, ce qui réduisait les calculs à très peu de chose.

Dans la troisième question, la discussion faite est en général exagérément sommaire. Certains candidats obtiennent des résultats surprenants (par exemple, jamais de mouvement révolutif en θ), et ne semblent pas s'en étonner.

Enfin, des résultats ont été obtenus par un assez grand nombre de candidats dans la quatrième question, et par une minorité dans la cinquième, qui était plus difficile. Mais que de désinvolture dans l'exposé ! L'épreuve d'analyse est passée, toutes les audaces sont permises. On affirme sans preuves ; on néglige des termes, on en conserve d'autres — souvent à tort — sans aucun essai de justification. D'autre part, dans ces questions, et notamment dans la cinquième, libellée à dessein de façon concise, le correcteur a regretté de ne trouver aucun candidat qui fasse preuve à la fois d'initiative et de sens mécanique, et qui ait la curiosité de « chiffrer » les résultats, en choisissant à son gré des données numériques vraisemblables, afin de se rendre compte de la valeur des approximations faites.

Cette première partie aurait suffi à classer la majorité des copies. Environ un tiers des candidats ont abordé la partie II, mais, dans ce lot, peu ont obtenu des résultats substantiels, les autres ayant ignoré les termes gyroscopiques ou les ayant perdus au cours de calculs inutiles et compliqués. Pour la dernière question, qui était plus difficile, pratiquement aucun résultat n'a été obtenu.

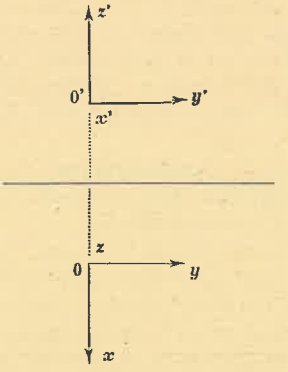
Voici quelques renseignements statistiques : 187 copies ont été corrigées. Malgré la facilité de certaines questions et un barème très indulgent, la moyenne de l'épreuve n'est que de 5,7, en augmentation toutefois sur celle du concours précédent. Les meilleures notes sont 18 (1 fois), 17,5 (1 fois), 15 (2 fois), 12,5 (1 fois), 12 (2 fois). Les deux meilleures copies, de qualités très voisines, ont traité l'essentiel de la partie I et des deux premières questions de la partie II. Après elles, les notes, comme d'habitude, baissent rapidement. Il y a 17 notes supérieures ou égales à 10, 64 entre 7 (compris) et 10 (exclu), avec une accumulation de 7, 7,5 et 8. Le lot des copies très faibles a toujours une ampleur anormale, et inquiétante pour un problème qui comportait des points faciles à gagner : 49 copies ne dépassent pas la note 3, 11 ont la note 0.

En conclusion, à part d'heureuses exceptions, on doit généralement noter une préparation insuffisante d'une épreuve pour laquelle le travail préparatoire est pourtant rapidement payant. Et ce travail n'est pas inutile. Comme l'écrit M. le Doyen Pérès dans l'introduction de sa *Mécanique générale :* « Cet enseignement a une valeur de formation que l'on aurait tort de méconnaître. Il contribue au développement des facultés d'intuition qui trouvent à s'employer largement sur les concepts mécaniques. D'autre part, la discussion d'un problème de Mécanique fait intervenir des qualités d'ordre, de précision, d'initiative, dont l'acquisition n'est pas indifférente. »

EPREUVES PRATIQUES

I. Sujet de l'Epure

La ligne de terre est portée par le petit axe de la feuille. Les données sont en centimètres et rapportées à un trièdre trirectangle OX, OY, OZ, dont les projections sont définies comme suit : le point O est projeté en o, o' sur le grand axe de la feuille, o à 8 en avant de la ligne de terre, o' à 9 au-dessus de la ligne de terre ; OX est de bout, dirigé vers l'avant ; OY est parallèle à la ligne de terre, dirigé vers la droite ; OZ est vertical, dirigé vers le haut.



Un premier paraboloïde hyperbolique P_1 a un plan directeur horizontal et contient les deux droites $D\,(X = 4\ ;\ Z = Y)$ $D_1\,(X = Y + 4 = Z)$.

Un second paraboloïde hyperbolique P_2 a un plan directeur horizontal et contient les deux droites $\Delta\,(X = 0\ ;\ Y = -4)$ $\Delta_1\,(X = -4\ ;\ Y + Z = 0)$.

1) Construire les projections de l'intersection (C) des deux paraboloïdes. Point courant et tangente ; points et tangentes remarquables ; asymptotes.

2) On fait tourner cette intersection (C) autour de l'axe OZ. Construire la méridienne principale de la surface de révolution (S) obtenue. Comment se complètent les intersections de cette surface et de chacun des deux paraboloïdes ?

3) Représenter l'ensemble des portions de *surface* supposées opaques de chacun des paraboloïdes intérieures à (S) et limitées aux plans de cotes $Z = +12$ et $Z = -12$. (L'intérieur de (S) est la région contenant l'axe OZ).

On tracera, si possible en couleurs différentes, quelques génératrices visibles, du système horizontal pour P_1 et du système de front pour P_2.

4) Dans une brève notice, justifier les propriétés remarquables rencontrées.

Rapport du correcteur (M. Euvrard)

Le sujet proposé était très simple. Deux paraboloïdes hyperboliques ont chacun un plan directeur horizontal. L'un d'eux a une génératrice verticale tangente à l'autre. Dans tout plan horizontal les génératrices de chaque paraboloïde s'y trouvant sont rectangulaires.

L'intersection comprend donc la droite à l'infini du plan horizontal et une cubique gauche unicursale (C) projetée horizontalement suivant une cissoïde (un point de rebroussement et des directions asymptotiques isotropes, rayons doubles de l'homographie des directions de génératrices dans les divers plans horizontaux). On peut

d'ailleurs trouver cette cissoïde comme podaire du contour apparent horizontal de l'un des paraboloïdes par rapport à l'un de ses points.

Cinq candidats seulement ont justifié la nature de cette projection. La plupart des épures indiquent un tracé très vague de la courbe dont la construction de l'asymptote n'est nullement justifiée, pas plus que celle de la tangente de rebroussement pour la détermination de laquelle les cercles de Meusnier, parfois invoqués, sont parfaitement impuissants. Le correcteur a tenu rigueur aux candidats qui n'ont pas déterminé la tangente au point courant par les procédés de la géométrie descriptive.

La cubique (C) tourne ensuite autour d'un axe vertical choisi de façon que la surface de révolution (S) engendrée soit un hyperboloïde à une nappe. Il va de soi que justifier la nature de (S) par le fait qu'elle possède un cercle et un seul dans tout plan horizontal est une pure plaisanterie. A ce titre, en tournant autour de tout axe vertical, (C) engendrerait une quadrique, ce qui semble fort surprenant. On peut montrer géométriquement d'une façon très simple, à partir de la construction du point courant, ou en utilisant la génération classique de la cissoïde, que chaque parallèle de (S) rencontre une des droites figurant dans les données de l'épure, d'où le résultat.

Cinq candidats seulement ont justifié la nature de (S). Dans la ponctuation, qui n'est pas abordée sérieusement dans plus de quatre épures, on a parfois oublié le contour apparent horizontal du paraboloïde P_1.

Les notices démontrent du manque de bon sens. Insistons d'abord sur leur rédaction fâcheuse : abréviations, fautes d'orthographe ou de français grossières ; ensuite sur leur inconsistance. On y développe pendant deux ou trois pages le détail de la construction du point courant et de sa tangente (qui ne devrait pas y figurer), mais il n'y a pas un mot de justification pour l'asymptote de (C), son rebroussement, la nature de (S). Enfin, une épure n'est pas une épreuve de géométrie analytique, et si l'on peut raisonnablement faire appel à un petit calcul pour préciser un point dont la démonstration géométrique échappe, il n'est pas admissible que les courbes projections ne soient tracées que d'après leurs équations.

Les graphiques, enfin, devraient être plus soignés, et les épures laissées au crayon seront désormais pénalisées.

Malgré un barème de correction extrêmement large, la moyenne de l'épreuve n'est que de 6,5, trois bonnes épures venant en tête, notées 17. Seize notes seulement atteignent ou dépassent 10. Les candidats seraient bien avisés de marquer un peu plus d'intérêt à une épreuve qui leur permet de mettre en jeu leurs connaissances géométriques et qui, à tort ou à raison, compte autant que la moitié d'une composition écrite dans le résultat final.

II. Calcul numérique

(Durée : 3 heures)

Sujet du calcul numérique. — L'équation différentielle $2y'^3 + xy'^2 - y = 0$ possède une courbe intégrale algébrique (C) passant par le point de coordonnées

$$x = 1{,}25 \; ; \; y = -0{,}75.$$

1° (*6 points*). Déterminer (C).

2° (*5 points*). Construire (C).

3° (*9 points*). Calculer l'ordonnée du point de (C) d'abscisse $x = -1$.

N.-B. — La deuxième question pourra éventuellement être traitée après la troisième.

La note attribuée au 3° tiendra compte de la précision obtenue et des justifications données.

RAPPORT DU CORRECTEUR (M. Y. MARTIN)

Renseignements statistiques : 66 copies. Moyenne générale : 7,3. Répartition des notes :

Note	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
Fréquence	15	7	4	8	7	8	7	5	4	1

L'épreuve comportait la résolution d'une équation différentielle de Lagrange, puis la construction d'une courbe intégrale (C), enfin la recherche de l'ordonnée d'un point de (C) d'abscisse connue.

Le correcteur ne pensait pas que la première question arrêterait 22 candidats, soit le tiers des composants ! Il dut partager le « douloureux étonnement » d'un des deux candidats classés premiers à l'épreuve d'analyse et qui, après trois heures d'effort, « constata qu'il ne savait pas résoudre une équation différentielle » ! Par contre, l'autre candidat, classé premier en analyse, confirma ses qualités en se classant également en tête à l'épreuve de calcul numérique.

Parmi les candidats que n'arrêta pas la première question, bien peu se soucièrent, en prenant $y' = p$ pour variable, de savoir s'il n'existait pas d'intégrales rectilignes qu'ils laissèrent ainsi échapper.

La construction de la courbe ne présentait guère de difficultés. De trop nombreux candidats ne reconnurent pas la signification de p, pourtant évidente, et trop peu dessinèrent la courbe (C) avec quelque souci de précision ; en particulier, il aurait été souhaitable de déterminer et de placer les paraboles asymptotes, ce qui ne fut fait que dans quelques trop rares copies.

Le calcul de l'ordonnée pouvait être dégrossi par lecture sur la courbe elle-même puis effectué par des méthodes variées ; pour obtenir une plus grande précision, il était souhaitable, mais non indispensable, d'éliminer p entre les équations $x(p) = -1$ et $y(p) = y_0$, puis de résoudre l'équation $f(y_0) = 0$ obtenue, en appliquant par exemple, soit la méthode d'interpolation linéaire, soit plutôt une méthode d'itération telle que celle de Nexton.

Pour conclure, nous regrettons que les candidats ne soient pas suffisamment entraînés aux applications numériques qui devraient constituer, pour de futurs professeurs, une part non négligeable de leur culture mathématique.

REMARQUES SUR LES EPREUVES ORALES

Pour un sujet donné, il n'existe pas de « leçon-type » telle que la note du candidat serait mauvaise ou bonne selon que sa propre leçon s'éloigne plus ou moins de celle-là. Les deux qualités dont les candidats ont le plus besoin pour réussir dans leurs épreuves orales sont le bon sens et le soin.

Le jury n'est pas systématiquement hostile au choix de certaines présentations qui font appel à des notions qui débordent du programme, mais de telles notions doivent alors être introduites de la façon la moins lourde et la plus simple en les débarrassant de toute difficulté supplémentaire.

Ainsi, dans la leçon de Spéciales « Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables, changement de variables, applications », un candidat a introduit la notion de fonction différentiable, mais au début de son exposé, il a soulevé la question du choix des diverses normes possibles (alors que la distance euclidienne est familière à tous les élèves et suffit pour un début), dans le problème du changement de variables, il a traité le cas d'une fonction vectorielle, ajoutant ainsi, pour la majoration du reste (traités d'ailleurs de façon obscure) des difficultés non essentielles. Aucun élève n'aurait tiré profit de cette leçon, aucun n'aurait sans doute saisi l'idée si simple d'approximation linéaire d'une fonction.

Tout à l'opposé, un autre candidat, dans la leçon de Spéciales, « Multiplication de deux séries absolument convergentes, produit de deux séries entières, exemples », au lieu de se contenter de la démonstration traditionnelle, a montré un peu vite, mais simplement, la possibilité du choix d'un ordre arbitraire dans la sommation de la série à double entrée définissant le produit, puis il a fait découler toutes les propriétés classiques de cette propriété-clef. Sa leçon, malgré quelques défauts mineurs, a été favorablement accueillie.

Quelques exemples de manque de bon sens :

Le candidat ayant traité la leçon de Spéciales, « Première leçon sur les séries à termes positifs », a cru bon d'énoncer « Théorème : soit une série positive et soit σ une permutation de l'ensemble des entiers, alors les séries a_n et $a_{\sigma(n)}$ sont de même nature ». Un Français moyen aurait énoncé : « On peut changer arbitrairement l'ordre des termes d'une série positive sans changer sa nature. »

Le candidat qui a traité en Spéciales sa leçon « Série entière d'une variable complexe, rayon de convergence, convergence uniforme, continuité, exemples », a montré la convergence des séries $u_n = \frac{x^n}{n!}$ et $u_n = x^n$ par un appel à la règle de Cauchy et la divergence de la série $u_n = n\,!\,x^n$ par un appel à la règle de d'Alembert.

La leçon de Spéciales, « Mouvement d'un solide, distribution des vitesses à un instant donné » est suffisamment longue ; le candidat qui l'a traitée a cru bon de parler, en fin de leçon, du mouvement-plan sur plan, il aurait dû se limiter.

Les deux textes de leçons de Spéciales, « Illustrer par un ou deux exemples une leçon antérieure sur a construction des courbes planes définies par une équation polaire de la forme $\rho = f(\theta)$ » et « Construction des courbes définies en coordonnées polaires par leur équation $\rho = f(\theta)$ (Les théories relatives à l'étude en un point à distance finie ou à l'infini sont supposées acquises) », doivent visiblement conduire à des exposés différents, le candidat qui a eu à traiter la seconde de ces leçons a traité en réalité la première.

De nombreux candidats n'ont pas réfléchi au fait qu'une leçon de géométrie demandée en classe de Mathématiques Elémentaires, niveau de la classe de Mathématiques Supérieures doit être traitée dans un tout autre esprit que la même leçon demandée en classe de Mathématiques. Par exemple, le candidat ayant eu à traiter la leçon « Mathématiques Elémentaires, niveau Mathématiques Supérieures : Transformées par polaires réciproques par rapport à un cercle, applications », n'a pas mentionné une seule fois les éléments à l'infini.

Le manque de soin se révèle le plus souvent dans les leçons d'Elémentaires : on ne peut souvent distinguer si un candidat *affirme* ou *démontre*. Le candidat ne distingue pas entre les deux modes de raisonnement par analyse et synthèse et par emploi de conditions nécessaires et suffisantes. Parfois on annonce une méthode et c'est l'autre qui est employée. Un raisonnement et sa réciproque sont parfois traités sur une même figure.

Enfin, certains candidats, bien entendu, ont montré leur faiblesse en commettant de graves fautes. Tel celui qui, dans la leçon de Spéciales, « Croissance comparée des fonctions exponentielle, puissance, logarithme », a trouvé la limite d'une fonction du type ue^v en disant, « la fonction exponentielle l'emportant, la limite sera zéro ». Tel celui qui, dans sa leçon sur l'intégrale définie, a commis la faute si souvent signalée qui consiste à ne pas montrer que la limite des sommets S et s est indépendante du mode de division. Tel encore celui qui croit que la série de Mac Laurin d'une fonction, lorsqu'elle converge, est nécessairement égale à cette fonction. Un autre candidat a affirmé que si deux séries entières ont des rayons de convergence différents $R < R'$ il peut arriver que la somme des séries soit développable en une série convergente pour $|x| > R$.

R. Dontot,
Inspecteur général de l'Instruction publique.

N.D.L.R. — A l'encontre des rapports des années précédentes, le rapport sur le concours de 1957 ne précise pas la liste des leçons proposées à l'oral. On sait en effet que *les programmes des épreuves écrites et pratiques et le programme maximum des épreuves orales, pour les années 1958 et suivantes,* ont été modifiés. Ces programmes ont paru dans le *B.O.E.N.* n° 34 du 29-9-57 (note du 13 septembre 1957 classée sous le n° 113 Sd, § 2/A2).

Informations utiles.

Extraits du compte rendu du Conseil Supérieur de l'Education Nationale (session du 28 janvier 1958) :

II. — Projet de décret modifiant le décret du 7 août 1927 relatif au Baccalauréat de l'Enseignement Secondaire (introduction d'une composition de Mathématiques à l'écrit de la série sciences expérimentales).

Le Conseil Supérieur a donné un avis favorable à la publication de ce décret, sous réserve que les dispositions n'en soient pas applicables avant la première session des examens de 1959.

III. Projet de décret modifiant le décret du 7 août 1927 relatif au Baccalauréat de l'Enseignement Secondaire (modification des coefficients des interrogations de Mathématiques et de Sciences dans les séries C, Moderne et Technique).

Le Conseil Supérieur a donné un avis favorable à la fixation des coefficients ci-après :

SÉRIE CLASSIQUE C

Oral :

— Interrogation de Mathématiques : 5.
— Interrogation de Sciences physiques : 4.

SÉRIE MODERNE

Oral :

— Interrogation de Mathématiques : 6.
— Interrogation de Sciences physiques : 5.

SÉRIE TECHNIQUE

Oral :

— Interrogation de Mathématiques : 3.
— Interrogation de Sciences physiques : 3.

Deux amendements, tendant à l'attribution du coefficient 3 à la composition de Mathématiques à l'écrit de la série moderne, et à l'attribution du coefficient 4 à la composition française à l'écrit de la série technique, n'ont pas été adoptés.

Le Conseil Supérieur a donné le même avis que sur le projet n° 2 : les dispositions de ce décret ne doivent pas être applicables avant la première session des examens de 1959.

D'autre part, au cours de la délibération, le Conseil Supérieur a émis le vœu « que, pour permettre aux élèves de l'enseignement moderne doués pour les études littéraires de faire des études secondaires complètes, soient prévus, soit un Baccalauréat moderne à tendances littéraires renforcées, soit des coefficients au Baccalauréat M leur permettant de poursuivre des études supérieures valables ».

IV. — Projet de décret portant reconduction en 1958 des dispositions des décrets du 13 octobre 1952 et du 5 juin 1953 instituant de nouvelles séries C' et M' du Baccalauréat de l'Enseignement Secondaire.

Le Conseil Supérieur a donné un avis favorable à la publication de ce décret.

V. — Projet de décret modifiant le décret du 13 octobre 1952 instituant de nouvelles séries du Baccalauréat de l'Enseignement Secondaire (modification des coefficients des interrogations de Mathématiques et de Sciences dans les séries C' et M').

Ce projet est analogue au projet n° 3, mais il s'applique aux séries C' et M'. Il fixe ainsi certains coefficients :

SÉRIE CLASSIQUE C'

Oral :

— Interrogation de Mathématiques : 4.
— Interrogation de Sciences expérimentales : 5.

SÉRIE MODERNE M'

Oral :

— Interrogation de Mathématiques : 3.
— Interrogation de Sciences physiques : 2 1/2.
— Interrogation de Sciences naturelles : 2 1/2.

Il a été approuvé par le Conseil Supérieur, sous la même réserve : il ne devra pas avoir effet avant la première session des examens de 1959.

XIII. — Projet d'arrêté portant équivalence des certificats d'études supérieures avec un diplôme d'études supérieures de Mathématiques en vue de l'inscription à l'Agrégation de Mathématiques.

Ce projet tend à considérer comme équivalents au diplôme d'études supérieures, en vue de l'inscription à l'Agrégation de Mathématiques, les certificats d'études supérieures suivants :

— Certificat de Mathématiques approfondies, délivré par la Faculté des Sciences de Paris.

— Certificat de calcul numérique, délivré par la Faculté des Sciences de Grenoble et par la Faculté des Sciences de Toulouse.

— Certificat de calcul automatique, délivré par la Faculté des Sciences de Paris.

Le Conseil Supérieur a donné un avis entièrement favorable à la publication de cet arrêté.

(Reproduit de *L'Education Nationale* du 13-2-1958).

• Modification du règlement sur l'organisation de l'Ecole Polytechnique (conditions d'admission au concours d'entrée) : décret n° 58-104 du 3 février 1958 (*B.O.* n° 7 du 13-2-1958, p. 487).

VI. LA VIE DE L'ASSOCIATION

RAPPORT GÉNÉRAL SUR L'ACTIVITÉ DE L'A.P.M.

Les Collègues voudront bien excuser la sécheresse un peu technique de ce rapport. L'importance et l'abondance des questions à traiter suffiront à allonger ce texte que j'aurais bien voulu faire plus court et plus élégant.

Comme chaque Assemblée générale, celle-ci est une bonne occasion de faire le point des questions qui nous intéressent. Je les classe de la façon suivante : 1) Situation et fonctionnement de l'A.P.M. 2) Les Régionales. 3) *Bulletin.* 4) Problèmes pédagogiques. 5) Problèmes de la formation des maîtres. 6) Horaires et programmes. 7) Conclusions.

*
**

1. Situation et fonctionnement de l'A.P.M. — Les effectifs de l'Association continuent leur croissance : en 1954, 1 784 cotisants ; en 1955, 1 870 cotisants ; en 1956, 2 207 cotisants ; en 1957, 2 428 cotisants ; en 1958, plus d'un mois avant l'Assemblée générale, 2 585 cotisations ont été perçues. Nous ne devons pas nous estimer pour autant satisfaits et c'est l'objectif des 3 000 membres qu'il faut se proposer d'atteindre en deux ans.

Les effectifs de l'A.P.M. restent insuffisants dans l'Enseignement Technique, parmi les professeurs de Cours Complémentaires et parmi les professeurs de l'Enseignement Supérieur. Il faut en rechercher les raisons. La plus évidente est que, par le fait même de sa composition, notre Association a tendance à traiter beaucoup de problèmes sous l'angle prioritaire de l'Enseignement du Second Degré. Je ne veux pas dire que ce point de vue soit mauvais ; les besoins légitimes de cet enseignement doivent être attentivement étudiés. Mais ce souci ne doit pas être exclusif. Dans la mesure de nos moyens, nous avons agi, — je parle ici au nom du Bureau —, avec la préoccupation de travailler pour l'enseignement scientifique dans son ensemble. Et, par là, pour l'Ecole Publique tout entière.

L'administration d'une Association de 2 500 membres est une tâche assez lourde. Devoir agréable pour moi, je veux signaler l'œuvre de notre Collègue Legrand, notre ministre des finances depuis de longues années : il ignore ce qu'est un déficit, il nous livre des comptes qui feront l'envie de beaucoup. Je pense qu'ils feront, en tout cas, notre unanimité pour le remercier de sa gestion si réussie : l'aisance de notre trésorerie est un garant de notre indépendance.

Nous devons aussi exprimer notre reconnaissance à M. Tournade, du Musée Pédagogique, sur qui reposent les tâches ingrates du secrétariat administratif. Beaucoup de nos Collègues ignorent, malheureusement, quel ami actif ils ont dans la maison de la rue d'Ulm, en la personne de M. Tournade. Je proposerai à l'Assemblée générale de lui témoigner sa sympathie de façon explicite.

Dans ces conditions, le renouvellement des cotisations devait donc se passer sans incident. Le Trésorier indique (et il a raison) les frais provoqués par des retardataires. Mais nous avons la grande satisfaction de connaître peu de démissions, aucune à ma connaissance n'ayant été motivée explicitement (1).

(1) Inquiet de la démission de trois Collègues d'un grand Lycée, je demande des explications au Correspondant local. Celui-ci m'écrit : « Non renouvellement des cotisations à cause de la rédaction du *Bulletin*, qui, dans la majorité de ses articles, ne leur semble pas répondre aux buts de l'Association. » Dommage que les démissionnaires eux-mêmes n'aient pas écrit avec plus de précision leurs reproches ; le *Bulletin* aurait publié avantageusement leurs critiques.

Le Comité a tenu ses trois réunions traditionnelles : 9 mai 1957 (renouvellement du Bureau), 17 octobre et 23 janvier 1958. *Le Bureau* a tenu des réunions les 7 et 27 novembre, 11 décembre 1957 et 6 mars 1958. Des rencontres occasionnelles, des contacts téléphoniques ont permis dans bien des cas d'éviter des réunions dont la multiplicité pèse lourdement sur les emplois du temps de chacun d'entre nous.

Je plaide coupable quant à la mauvaise organisation du travail du Bureau J'avais souhaité une plus grande division du travail ; je n'ai su, ni la préciser, ni la réaliser. J'espère que mon successeur saura, mieux que moi, organiser ce travail du Bureau. Sans aucun doute, là est la clé de nouveaux progrès dans l'efficacité de notre travail.

***

2. Les Régionales. — Les exemples de la Régionale de Nancy, animée par notre Collègue Mougenot, et de celle de Lille où, grâce à Mlle Vervaecke, de nombreux Collègues participent à des conférences régulières, ces exemples, et ceux que je peux ignorer, prouvent l'intérêt d'une structure mieux définie des Régionales.

On sait que nos statuts prévoient leur existence sans en fixer précisément le fonctionnement. Cette liberté doit permettre une bonne adaptation aux conditions locales. Encore faut-il qu'un groupe d'animateurs se dévoue pour « lancer le mouvement ».

L'organisation, par la Direction du Second Degré, de quelques stages régionaux de Mathématiques a montré que, vis-à-vis de telles initiatives de l'Administration, l'existence de quelques correspondants locaux pouvait simplifier et améliorer notre action.

Notre Collègue Mougenot, chargé par le Bureau de suivre cette question des Régionales, a envoyé le questionnaire suivant :

Un nom : (celui de votre Régionale).

Des dates : (celles, approximatives, de vos deux dernières réunions).

Des nombres : celui des professeurs assistant au moins une fois dans l'année aux séances.

a) habitant au centre (rayon de 25 km.) ;
b) habitant à plus de 25 km. ;
c) membres de l'Enseignement Supérieur ;
d) membres de l'Enseignement Technique ;
e) membres des C.C.

Une adresse : (celle du ou des correspondants).

Des sujets : (barrer les titres non abordés, en ajouter d'autres).

Exemple : circulaire du 23-10-1957 sur la mise en application des nouveaux programmes de 5e et 6e.

Enquêtes de l'A.P.M. (les citer).

Réformes diverses (les préciser).

Compte rendu d'ouvrages, manuels ou autres (lesquels).

Conférences faites par des professeurs de l'Enseignement Supérieur pour l'A.P.M.

Communications des membres de la Régionale.

Présentation de films (lesquels).

Présentation de matériel d'enseignement (précisez).

Un budget : Quel est votre budget local en dépenses ?

Réelles

Ce que vous souhaiteriez avoir

Convocations

Salle

Compte rendu
Indemnité de déplacement
Quelles sont vos ressources ?
Pensez-vous qu'une cotisation locale soit souhaitable ?
Sur quelle base (qui la payerait, combien).

Veuillez adresser vos réponses sous quinzaine à notre Collègue chargé par le Bureau de l'A.P.M. de centraliser les informations relatives aux Régionales : R. MOUGENOT, *Lycée Henri-Poincaré, Nancy*.

Sans vouloir rien imposer, l'Assemblée générale pourrait adopter un vœu recommandant aux Régionales de se développer et leur suggérant un programme de travail (Cf. vœu 1, p. 292).

*
**

3. « BULLETIN ». — Nous avons fait de notre mieux pour maintenir la qualité de notre *Bulletin* et améliorer la composition de ses sommaires dans le sens des vœux exprimés l'an dernier. Y avons-nous réussi ? C'est en ce domaine que nous avons les critiques les plus fréquentes et... contradictoires. On a vite fait, c'est évident, de rendre le Comité de rédaction responsable de tel article qui a déplu ou qui a été jugé mauvais.

Je prendrai d'abord la défense des auteurs, quels qu'ils soient. Que certains critiques, justement les plus sévères, veuillent bien commencer par nous adresser leurs essais ! Nous ne nous plaignons pas de manquer d'articles ; certains attendent ou ont attendu un an avant de paraître. Mais une plus grande abondance encore permettra un meilleur choix et un meilleur équilibre des sujets traités dans un même numéro.

On se plaint de la rareté des études sur l'enseignement du premier cycle. Il est vrai que beaucoup de Collègues expérimentés sont trop discrets sur leurs réalisations. Que chacun d'entre nous fasse la chasse à ces pédagogues silencieux.

On se plaint de l'austérité des grandes études sur la topologie. Il est vrai que les Mathématiques, à ce niveau, demandent de l'attention ; mais je demande aux critiques de relire la conférence de M. SERRE sur les Revêtements. Pour avoir publié ce texte, je pense que la rédaction du *Bulletin* peut plaider non-coupable.

Je ne cite pas quelques réclamations particulières du genre « trop d'astronomie » et « pas assez d'astronomie ». Elles se neutralisent. Et je sais bien qu'on ne peut contenter tout le monde. Est-ce d'ailleurs souhaitable ?

Je reste persuadé que le développement donné au *Bulletin* est un élément favorable pour la vie de l'A.P.M. (même si cela coûte cher). Et que la meilleure formule est celle qui ne satisfera que les perpétuels insatisfaits : une matière à réflexion. « *Plus je pense, plus je pense* », disait l'heureux Valéry.

En tout cas, je veux remercier tous les Collègues qui ont contribué à nourrir nos pages.

Une grave défaillance de ma part : faute de temps, je n'ai pu assurer la publication du numéro de décembre. En accord avec le Comité, et sur la proposition de M. LEGRAND, nous ferons en sorte que le nombre de pages publiées en 1957-1958 reste du même ordre que l'année précédente (on reconnaîtra d'ailleurs que, pour une publication *trimestrielle*, nous ne serons pas en reste : 5 fascicules et les 2 *Annales*).

*
**

4. PROBLÈMES PÉDAGOGIQUES. — L'activité pédagogique de l'A.P.M. s'est manifestée, cette année, de façon peut-être moins éclatante que l'année précédente, mais avec autant d'efficacité, je crois.

En novembre 1956 nous avions eu des journées d'études à Sèvres ; en avril, nous avions organisé des journées d'information sur l'astronomie. Cette année nous n'avons rien pu organiser de semblable. Mais nous avons été présents partout où il était urgent ou intéressant de l'être.

Notre participation à des journées d'études sur les langues vivantes et les sciences ont donné matière à des études fort utiles (Cf. *Bulletin* 188) et occasion de développer les relations A.P.M.-A.P.L.V.

Nos rapports avec nos Collègues physiciens et naturalistes ont été fréquents : trois réunions communes de nos Bureaux, à propos de la fameuse Commission Billères.

Nos contacts avec les professeurs des autres pays se sont multipliés. Il est à peine besoin de citer les fraternelles relations que nous entretenons avec nos Collègues belges. Ces liens sont d'ailleurs très utiles. Je soumets un vœu à l'appréciation des Collègues : que les rencontres internationales de cet été, le Congrès d'Edimbourg en particulier, soient l'occasion de renforcer ces liens, ce renforcement pouvant aller jusqu'à une formule de fédération ou de comité international de liaison (Cf. p. 292).

Les relations de l'A.P.M. et de la Société Mathématique de France se sont encore traduites concrètement par l'organisation d'un nouveau cycle de conférences. Le succès régulier de celles-ci est la meilleure réponse qui peut être faite aux détracteurs de cette initiative. Et j'ai plaisir, au contraire, à exprimer notre reconnaissance à tous les conférenciers. Les thèmes abordés cette année, plus divers, ouvrent de nouvelles perspectives et je crois que nous serons nombreux à souhaiter la poursuite et même l'extension d'une initiative qui témoigne fort justement de notre souci de culture permanente et de l'unité de l'enseignement scientifique.

Quelques réunions locales ont été organisées pour discuter de questions pédagogiques : en novembre, à Paris, pour l'application des nouveaux programmes de Sixième et Cinquième ; en mars pour la présentation d'un matériel d'enseignement ; en janvier, j'ai eu le plaisir de participer à une réunion sur l'enseignement de l'astronomie organisée par M. KOURGANOFF, à Lille. Il est certainement possible de faire mieux en ce domaine : champ d'activité des Régionales. Présentation de films ou de matériel, exposés et discussions, en favorisant les rencontres de Collègues, stimuleront la recherche pédagogique.

⁂

5. FORMATION DES MAÎTRES. — Sous le titre « Les problèmes numéro un », j'ai déjà abondamment traité le sujet de la formation des maîtres (*Bulletin* 188, p. 171-176). Depuis, la Commission Ministérielle a achevé ses travaux et elle a adopté, le 3 février, les termes du rapport qu'elle soumet au Ministre. Je n'ai pu me joindre à l'ensemble de la Commission pour adopter ce rapport et j'ai demandé à porter à la connaissance du Ministre la raison de mon désaccord. Je veux ici m'en expliquer complètement.

Sur la plupart des problèmes étudiés, j'approuve les conclusions de la Commission :

1° Reconnaître la polyvalence de l'agrégation n'est rien d'autre que la reconnaissance d'un fait. Il y a longtemps que l'agrégation n'est plus un concours de recrutement des professeurs du seul Second Degré. Une réforme du programme et de l'organisation du concours doit l'adapter aux conditions actuelles. L'institution d'une Commission de l'agrégation, chargée d'informer techniquement le Comité des Directeurs généraux, peut faciliter une révision périodique des programmes et de l'organisation du concours. Sur la question de la présidence du jury, j'ai soutenu l'avis de ceux qui s'opposaient au monopole de l'Enseignement Supérieur ; il faut que le Président soit une personnalité incontestée, à quelque ordre d'enseignement qu'elle appartienne.

2° Les vœux concernant la licence d'enseignement doivent permettre à un plus grand nombre d'étudiants d'acquérir un niveau très honorable en deux ans d'études après la propédeutique.

3° Le principe d'une option « mécanique » dans l'agrégation, la création d'une licence de Mathématiques appliquées, sont les étapes vers l'harmonisation des modes de recrutement dans le Technique et le Second Degré.

4° Les vœux relatifs à l'harmonisation des propédeutiques et des classes préparatoires aux Grandes Ecoles, tant pour les programmes, que pour les méthodes d'enseignement et pour les statuts des professeurs, font heureusement l'accord des professeurs du Supérieur et des professeurs des classes préparatoires. L'organisation des Collèges universitaires peut être suivie avec intérêt.

L'ensemble des conclusions précédentes concourt sans aucun doute à renforcer notre enseignement scientifique et je suis le premier à regretter de n'avoir pu m'y associer. D'où vient donc cette impossibilité ? Simplement de cette affirmation qu'on ne peut améliorer l'enseignement scientifique aux niveaux supérieurs, en méconnaissant les besoins réels de l'enseignement au niveau de l'initiation, en faisant même pire que méconnaître, en compromettant, dès le niveau de l'initiation, tout le développement de l'enseignement scientifique.

C'est en effet à cela que tendra inévitablement la création d'un professorat du premier cycle, pudiquement dénommé « recrutement au troisième niveau » : professeurs possédant la seule propédeutique, recrutés par concours (donc titulaires) et subissant une année de formation professionnelle. On peut d'ailleurs ajouter ici une remarque piquante : la formation des professeurs de Cours Complémentaires prévoit que ceux-ci, anciens instituteurs ayant subi deux années de formation professionnelle et ayant fait trois années d'enseignement subiraient une année supplémentaire de formation pédagogique et scientifique (au total six années du baccalauréat au Professorat) ; par ailleurs, la Commission a reconnu que même pour former un ingénieur moyen, il fallait au moins quatre ans après le baccalauréat. Il n'y aurait donc qu'une seule carrière scientifique demandant moins de qualification, deux ans d'études seulement, celle de professeur du premier cycle. Les représentants de l'Enseignement Supérieur, qui ont soutenu ce projet, ne semblent pas s'être rendu compte qu'ils s'interdisaient dorénavant de pouvoir critiquer les méthodes et les programmes de l'Enseignement du Second Degré : ou bien nous leur répondrons qu'à leurs yeux l'initiation est sans importance, ou bien nous leur ferons observer qu'un personnel enseignant insuffisamment formé par eux aux disciplines de la science est excusable s'il n'obtient pas les résultats que des professeurs plus expérimentés auraient pu atteindre.

Je me garderai de juger l'ensemble des professeurs de l'Enseignement Supérieur sur l'attitude de quelques-uns. Je ne veux pas voiler mon indignation sous des formules vagues. Sans doute suis-je de ceux qui ont accueilli le plus favorablement certaines initiatives du M.N.D.S. Ma déception n'en est que plus grande à mesurer sa responsabilité dans cette affaire. L'écho d'un Congrès des Etudiants des Facultés des Sciences porte la même marque. L'amitié et l'estime que j'ai pour certains des responsables du M.N.D.S. m'impose de les avertir de la grave erreur qu'ils commettent : à vouloir faire porter *tout* l'effort sur le développement scientifique supérieur, ils tuent... « la poule aux œufs d'or », cette foule des élèves scientifiques moyens parmi lesquels se recruteront les chercheurs les plus doués, les savants les plus éminents.

Il n'y a pas deux enseignements scientifiques. Il y a une chaîne d'efforts, de la Maternelle à la Sorbonne. Il ne faut pas briser un chaînon.

Pratiquement, voici comment les circonstances se sont présentées. Pour faire opposition au projet de la Commission, j'avais soumis l'amendement suivant (mis au point après accord avec nos Collègues naturalistes, sauf pour l'annexe B présentée à titre personnel) :

EXPOSE DES MOTIFS

Le projet de la Commission sur « le troisième niveau de recrutement » ne précise pas si les mesures qu'il recommande ont un caractère provisoire ou permanent. S'agit-il de trouver un moyen d'assurer tant bien que mal les services d'enseignement dans la situation grave de la crise actuelle de recrutement de professeurs scientifiques ? Les mesures envisagées, en créant un nouveau cadre de professeurs plus mal payés que les autres, et qui devront assurer un service difficile dans les pires conditions (classes surpeuplées et service hebdomadaire important), seront sans efficacité.

S'agit-il au contraire de fixer des règles qui, par leur caractère durable, auront une influence sur la formation future d'une « école moyenne » ou de toute autre formule de cette sorte ? Les mesures envisagées, en compromettant le niveau d'enseignement du Second Degré tel qu'il est, ne peuvent favoriser l'organisation d'un enseignement moyen et d'un enseignement du Second Degré tels qu'ils devraient être.

Il nous paraît donc essentiel de distinguer l'expédient provisoire de l'institution conçue pour durer. Le texte suivant ne concerne que les mesures provisoires susceptibles, à notre avis, de remédier à la pénurie actuelle des professeurs scientifiques.

En annexe nous ajoutons :

A. *Une motion commune des Bureaux de l'Association des Professeurs de Mathématiques, de l'Union des Physiciens et de l'Union des Naturalistes.*

B. *Un projet de réforme générale de l'organisation du recrutement des maîtres, pièce essentielle de toute réforme de l'enseignement.*

RECOMMANDATIONS *soumises à l'approbation de la Commission pour qu'elle les propose à* M. le MINISTRE *de l'Education Nationale.*

I. *La pénurie des professeurs trouve sa principale raison dans la médiocrité de leurs traitements, ainsi que dans certain discrédit plus ou moins reconnu jeté par l'opinion publique sur la fonction enseignante. On ne peut remédier à la crise actuelle de recrutement :*

1° *qu'en revalorisant de façon substantielle les traitements des maîtres à tous les niveaux ;*

2° *qu'en montrant, par des mesures réelles, visibles et efficaces, que la sollicitude de la Nation tout entière est acquise pour les hommes et les choses de l'Ecole Publique.*

II. *Des étudiants, titulaires d'un certificat de propédeutique scientifique, pourront, après une année de formation pédagogique et de complément de formation scientifique, être engagés en qualité d'auxiliaires pour l'enseignement scientifique dans le premier cycle de l'Enseignement du Second Degré, aux conditions suivantes:*

— Les intéressés seront gratifiés d'un traitement égal à celui des étudiants admis dans les I.P.E.S.

— Un horaire de service au plus égal au tiers de celui qui est exigé des professeurs titulaires, serait exigé d'eux, ces heures étant rétribuées au tarif des heures supplémentaires fixé selon les modalités précisées dans la recommandation (à la suite), VII.

— Toutes facilités seraient donc données à ces étudiants pour qu'ils puissent acquérir les diplômes nécessaires à leur entrée dans les cadres.

— Leurs services dans cette situation d'auxiliaires, limités à une durée de cinq ans au maximum, seraient validés au moment de leur entrée dans les cadres, sous réserve, bien entendu qu'ils aient acquis les diplômes nécessaires.

III. *Possibilité de maintien* sur place *des professeurs admis à la retraite* et qui accepteraient *d'assurer, encore un an ou plus, un service entier ou partiel,* A LA

CONDITION QUE LE CUMUL DU TRAITEMENT (ou resp. DU DEMI-TRAITEMENT) ET DE LA RETRAITE SOIT ADMIS.

IV. *Possibilité, en particulier pour certaines catégories de personnel féminin, d'assurer un demi-service (avec demi-traitement) donnant droit pour l'ancienneté de service.*

V. *Affectation spéciale des jeunes gens diplômés scientifiques à des postes d'enseignement pour la durée de leur service militaire (ou pour une durée qui ne serait en aucun cas inférieure à la durée du maintien sous les drapeaux des jeunes gens de la même classe de recrutement).*

VI. *Engagement de professeurs non Français, même si leur naturalisation n'est pas acquise à condition qu'ils possèdent les diplômes requis pour enseigner, ou les diplômes équivalents.*

VII. *Appel à un effort accru du personnel en service à la condition que les heures supplémentaires ainsi demandées (et qui resteraient facultatives) soient rétribuées* avec majoration *de 25 ou 50 % selon les règles en application dans l'industrie, et suppression du « plafond ».*

VIII. *Abrogation du décret n° 57-936 du 13 août 1957 portant recrutement d'agents contractuels (l'application de ce décret portant préjudice à l'Enseignement du Second Degré et à son personnel sans résoudre pour autant les difficultés de recrutement).*

ANNEXE A

Les Bureaux des trois Associations de Professeurs scientifiques du Second Degré (Association des Professeurs de Mathématiques, Union des Physiciens, Union des Naturalistes), réunis le 18 janvier 1958, félicitent M. WALUSINSKI, *Président de l'A.P.M., d'avoir pris nettement position contre le vœu émis par la « Commission d'étude des problèmes relatifs au recrutement et à la formation des personnels scientifiques de l'Enseignement et de la Recherche », qui demande la création d'un corps professoral nouveau pour l'Enseignement du Second Degré, constitué de maîtres pourvus seulement de la propédeutique scientifique.*

Ils prient M. WALUSINSKI :

1° *de rappeler à la Commission que la solution primordiale pour remédier à la pénurie du personnel enseignant dans son ensemble et plus particulièrement du personnel scientifique est la revalorisation substantielle et immédiate de la fonction enseignante ;*

2° *d'attirer l'attention de la Commission sur le fait que tout projet de réforme de durée ne peut envisager l'abaissement du niveau actuel du recrutement des maîtres du Second Degré.*

Provisoirement, pour remédier à une situation devenue catastrophique, des titulaires de la seule propédeutique scientifique, pourraient être engagés en qualité d'enseignants auxiliaires pour l'enseignement dans le premier cycle du Second Degré, aux conditions suivantes :

1° *Il leur serait accordé, pendant cinq ans au maximum, toutes facilités pour acquérir les diplômes nécessaires à l'entrée dans les cadres du Second Degré. On ne pourrait notamment exiger d'eux, pendant les cinq années prévues, qu'un service égal au tiers du service normal.*

2° *Les services rendus par l'enseignant auxiliaire, devenu professeur du Second Degré par l'acquisition des diplômes adéquats, seraient validés le jour de son entrée dans les cadres.*

ANNEXE B

Projet de réforme générale de l'organisation du recrutement et de la formation du personnel enseignant

1. PRINCIPES GÉNÉRAUX. — *A tous les degrés de l'enseignement, la qualification des maîtres est faite de la réunion de connaissances scientifiques (attestées par un diplôme de l'Enseignement Supérieur), et de connaissances pédagogiques (vérifiées par un concours de recrutement assurant à tous les citoyens la régularité incontestable des nominations de fonctionnaires).*

L'une des tâches de l'Enseignement Supérieur est d'aménager ses examens et ses cours pour qu'il puisse toujours s'en trouver qui soient exactement adaptés aux besoins des maîtres d'un ordre d'enseignement quel qu'il soit.

Les connaissances pédagogiques ne peuvent s'acquérir que par l'étude de la pédagogie théorique et par l'expérience vécue au contact de praticiens exercés.

La formation des maîtres est donc l'œuvre de l'enseignement tout entier.

2. NIVEAUX DE RECRUTEMENT (enseignement scientifique). — *Le personnel enseignant du Supérieur mis à part, il est prévu trois niveaux de recrutement (pour chacun le nombre entre parenthèses indique le nombre d'années d'études requises après le baccalauréat pour accéder au concours de recrutement) :*

1er niveau : INSTITUTEURS (2), *baccalauréat + deux années de formation professionnelle et de complément de culture dans les Ecoles Normales.*

2e niveau : PROFESSEURS CERTIFIÉS (4), *licence + une année de formation pédagogique dans un Centre Pédagogique Régional.*

Parmi les professeurs certifiés :

les uns sont spécialisés, C.A.P.E.S. actuel ou C.A.P.E.T. actuel, d'autres ont une licence bivalente adaptée à l'enseignement dans le premier cycle du Second Degré et passent un C.A.P.E.S.P.C. ;

d'autres, anciens instituteurs, ont une licence trivalente obtenue en vue du C.A.P.C.C. (pour les Cours Complémentaires).

3e niveau : PROFESSEURS AGRÉGÉS (5), *licence + diplôme d'études supérieures.*

3. ORGANISATION ADMINISTRATIVE. — *Au siège de chaque Académie et sous l'autorité du Recteur, il est créé un* INSTITUT DE FORMATION ET DE RECHERCHE PÉDAGOGIQUES (*I.F.R.P.*).

A la tête de chaque I.F.R.P. se trouve un Directeur assisté d'un Conseil paritaire formé de représentants élus par le personnel enseignant des divers ordres et par des représentants désignés.

L'I.F.R.P. a autorité pédagogique sur les établissements pédagogiques de l'Académie : Ecoles Normales d'instituteurs, Ecoles Normales d'apprentissage, Instituts de formation des professeurs de Cours Complémentaires, I.P.E.S. et Instituts de préparation de l'agrégation, Instituts Pédagogiques Régionaux (Services départementaux de la recherche pédagogique).

L'action des 17 I.F.R.P. est coordonnée par une Direction générale de la formation des maîtres (homologue de la Direction générale des constructions scolaires) à la tête de laquelle se trouve un Comité central de direction formé des Directeurs de divers ordres d'Enseignement et le Directeur du C.N.R.S.

4. REMARQUES SUR LE C.A.P.E.S.P.C. — *La polyvalence de ce Certificat d'Aptitude répondrait aux critiques qui ont été faites à certains maîtres des classes nouvelles insuffisamment préparés à assurer une partie de leur enseignement, alors qu'il a paru généralement heureux de diminuer, pour les plus jeunes élèves, le nombre de professeurs.*

La distinction marquée entre le C.A.P.E.S.P.C. et le C.A.P.E.C.C. peut donner

satisfaction aux maîtres actuels du Premier Degré justement soucieux de garder aux Cours Complémentaires un caratcère qui a ses mérites. En même temps une plus grande analogie entre les modes de recrutement peut favoriser ou orienter une évolution qui a déjà commencé et qui fonde dans les faits l'Ecole moyenne ou ce qui en tiendra lieu demain.

5. Remarques sur les I.F.R.P. — *Leur existence au siège de chaque Académie peut favoriser :*

a) *le développement de la Recherche pédagogique théorique et pratique (domaine où les études paraissent moins poussées en France que dans d'autres pays) ;*

b) *les liaisons utiles entre maîtres des divers ordres d'enseignement en les amenant à coopérer pour la formation des maîtres ; ce faisant les I.F.R.P. peuvent aider à fonder l'Ecole Unique.*

(Saint-Cloud, le 21 janvier 1958).

La Commission retint certaines recommandations (en particulier III, IV, VI et VII ; malgré mon insistance, elle écarta V). Mais si elle abandonna l'expression « cadre nouveau » et le titre de « Professeur du premier cycle », elle maintint l'idée du recrutement par concours (conduisant à la titularisation) de professeurs possédant la seule propédeutique.

Après deux heures de discussion vaine, où j'eus la surprise de constater que la Direction Générale du Second Degré ne partageait pas notre point de vue, je n'eus plus qu'à voter contre, en précisant qu'à cause de cela je voterais contre l'ensemble du rapport.

Certains membres de la Commission ont jugé sévèrement cette attitude qu'ils trouvaient peu constructive. Je leur retournerais volontiers l'observation : Comment construire sur rien ?

Ces travaux de Commission ont eu des échos. J'ai fait remarquer à M. Brunold qu'il y avait une certaine ironie à organiser des stages régionaux de Mathématiques pour les professeurs en exercice qui ont tout de même une certaine expérience, alors qu'on se préparait à recruter un personnel non qualité. Qu'il pouvait s'attendre à des remarques à ce sujet lors des stages susdits (Cf. circulaire reproduite p. 294). Par la suite, un coup de téléphone de la Direction du Second Degré m'avertissait que tout projet de professorat du premier cycle était abandonné ; qu'on préférerait embaucher des délégués à qui un service partiel permettrait de terminer leurs études (ce qui reprenait certaines de nos contre-propositions). Des informations de presse annonçaient ensuite le contraire. En commun avec nos Collègues Eurin et Oria, Présidents des Physiciens et des Naturalistes, nous avons publié une mise au point qu'on lira plus loin.

Au moment où j'écris ce rapport, je n'en sais pas plus. Je propose seulement à l'Assemblée générale d'adopter le vœu n° 3 qu'on trouvera p. 293.

***

6. Horaires et programmes. — Nos préoccupations sur le recrutement des maîtres ne doivent pas nous empêcher d'étudier quelles suites doit avoir le « petit pas » des réformes d'octobre 1957. Question qui comporte deux aspects complémentaires : horaires et programmes.

La satisfaction d'avoir obtenu le « dégel » des horaires du premier cycle ne ne peut nous faire oublier notre objectif plusieurs fois formulé : quatre heures hebdomadaires dont une de travaux pratiques ou travail dirigé avec dédoublement des effectifs. La thèse de l'Administration est que la pénurie des maîtres interdit de telles réalisations. L'argument est aussi employé pour dissimuler avec quelle timi-

dité le Ministère de l'Education Nationale revendique les crédits dont il a besoin.

Je pense que nous n'avons pas à entrer dans ces considérations et que si nous nous taisons on aura tôt fait de croire et de dire que nous demandions beaucoup pour obtenir un peu. Or notre projet des quatre heures était seulement fondé sur l'analyse objective des conditions de notre enseignement. Puisque, les premiers, nous avons dit que la réalisation devait se réaliser par étapes, nous devons fixer l'étape à franchir en 1958. En tenant compte des discussions de l'Assemblée générale 1957, il paraît juste de demander l'organisation de ces séances de travail à effectif réduit pour la classe de Troisième où l'urgence d'obtenir une complète acquisition des techniques de calcul s'impose (Cf. vœu n° 4).

Conformément au vœu de l'Assemblée générale 57, la rédaction et l'application de nouveaux programmes a été échelonnée dans le temps. Nous avons été associés aux travaux de l'Inspection Générale sur les programmes de Sixième et Cinquième (2). Nous avons exprimé notre satisfaction à constater certain infléchissement des méthodes laissant une plus large place à l'intuition et signalant la possibilité de recourir à des modèles concrets.

Les Collègues diront, à l'occasion de l'Assemblée générale s'ils souhaitent le même infléchissement dans les classes de Quatrième et Troisième. Cela peut comporter l'introduction de certaines notions de géométrie dans l'espace. Et il reste par ailleurs bien entendu que ces refontes ne doivent pas entraîner l'alourdissement global des programmes.

A notre connaissance, l'Inspection Générale souhaiterait fixer un schéma des programmes de Seconde et de Première scientifiques (ce qui comporterait l'étalement sur les deux ans de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace, puis le développement de l'algèbre et de l'analyse (dérivées et primitives de polynômes en Première, utilisation pour les aires et les volumes, étude analytique de la parabole). Cela permettrait de réformer aussitôt le programme de Mathématiques dans le sens d'un développement de l'algèbre et de l'analyse.

Ces questions demandent de longs débats que notre Assemblée générale ne pourra épuiser. Aussi sera-t-il très utile, pour guider l'action des responsables de l'A.P.M., que nos Collègues notent leurs idées en 4e page du bulletin de vote. Cette consultation annuelle de tous est fort précieuse.

Sans vouloir engager trop avant le débat, je voudrais présenter quelques remarques.

1° Les projets de l'Inspection Générale pour les Secondes et Premières répondent à certains des vœux de notre Commission des programmes. Les projets du M.N.D.S. (Cf. p. 252 de ce *Bulletin*) semblent plus ambitieux ; mais en géométrie ils offrent à nos yeux cet inconvénient de rejeter toutes les difficultés de l'espace en Première et d'introduire ainsi les transformations par le « bout » le plus délicat. Une synthèse des deux projets est-elle impossible ?

2° L'avantage incontesté du projet M.N.D.S. est de fixer à cinq heures l'horaire de ces classes scientifiques. N'est-ce pas indispensable ?

3° Par contre, ne faut-il pas aussitôt penser aux programmes des sections non-scientifiques ? Cela sera d'autant plus urgent si une section moderne littéraire est créée. Il ne s'agit évidemment pas de ressusciter le mythe de l'égalité scientifique (c'est-à-dire l'égale médiocrité). Il faut concevoir un programme adapté aux futures études de ces « littéraires » (?) qui ne seront peut-être que des cadres moyens aux prises avec force problèmes statistiques plutôt qu'avec celui des fondements axiomatiques de la géométrie euclidienne.

---

(2) J'ai eu personnellement droit à des critiques spéciales sur ce sujet, car j'ai été considéré comme directement responsable de l'introduction, à titre facultatif d'ailleurs, de notions d'astronomie. Si cela était vrai, j'en accepterais volontiers les risques.

4° Les programmes de Mathématiques, enfin, peuvent-ils être conçus hors d'une réforme générale des classes terminales qui a été amorcée par l'orientation plus scientifique de Sciences Expérimentales. Que pense-t-on d'une répartition des élèves scientifiques en quatre sections terminales : Mathématiques et Technique, Mathématiques Elémentaires, Sciences Physiques élémentaires, Sciences Naturelles élémentaires dont les noms préciseraient la science dominante ? (on a déjà traité ce sujet dans le *Bulletin* 176 de mars 1956, p. 361). Si la question est prochainement reprise, les Collègues doivent éclairer le Bureau sur leur opinion à ce sujet.

Il nous paraît sans objet de faire voter les Collègues sur un vœu au sujet des programmes qui ne pourrait exprimer toutes les nuances de pensée. Mais, j'insiste encore sur l'intérêt que le Bureau aura à dépouiller les avis transmis sur le quatrième feuillet du bulletin de vote.

***

En guise de conclusion. — Me pardonnera-t-on la longueur de ce rapport ? Pour ma défense, je dirai que je n'ai pas eu le loisir de faire court et qu'il faut aussi un talent que je n'ai pas. Aussi platement ou directement que je l'ai pu, j'ai voulu présenter l'ensemble des problèmes qui requièrent notre attention.

Cela motive les vœux 1, 2, 3 et 4 qu'on lira page 292 et sur lesquels les membres de l'A.P.M sont appelés à voter. Il leur faut aussi dire ce qu'ils pensent de l'action générale du Bureau, de la gestion de l'Association. Le vote B1 concerne le compte rendu financier ; le vote B2 se rapporte aux propositions finales du rapport de notre Collègue Legrand (ci-dessous).

Enfin, par le vote A, je souhaite que vous exprimiez votre approbation pour l'ensemble de notre action, aussi bien que pour la façon dont nous l'avons menée. Je vois fort bien les insuffisances de nos réalisations et j'accepte volontiers toutes les critiques de bonne foi. Humblement, disons que nous avons fait de notre mieux.

La position que j'ai prise, à propos de l'Affaire Audin, au nom de l'A.P.M., m'a valu approbations et critiques. Je m'y attendais. Je ne suis même pas surpris qu'on veuille parfois faire croire que cette prise de position a une implication politique. Nettement, calmement, je dis simplement : C'est faux. Il ne s'agit que de la justice et des droits de l'homme. Rien que cela, mais cela complètement. C'est un problème qui nous est posé tous les jours et dans toutes les circonstances. Audin étant professeur de Mathématiques, son sort ne pouvait être ignoré de l'A.P.M.

Je voudrais terminer sur une note moins sévère. Je ne le peux pas et je dois un aveu à tous les Collègues : quand le Comité m'a élu Président, en mai 1955, j'ai été flatté, — mais oui, je suis comme ça —, et inquiet. Ces honneurs et ces charges, que de soucis en perspective, me disais-je ! Aujourd'hui, au terme de mon mandat, je peux vous avouer que je ne quitte pas sans regret des fonctions pleines d'intérêt... qui procurent quelque besogne, bien sûr, mais permettent des contacts, font connaître beaucoup de dévouements et d'initiatives heureuses et vous persuadent que notre métier est un beau métier, que, tous ensemble, dans l'A.P.M., nous pouvons beaucoup pour qu'il le soit plus encore.

G. Walusinski.

Compte-rendu financier
du 24 février 1957 au 11 mars 1958

Recettes

En caisse le 23 février 1957	1 317 802
Cotisations et compléments	2 144 849

Bulletins	57 305
Recettes brutes de publicité	333 200
Bénéfice des journées d'Astronomie	20 000
Total des recettes	3 873 156

DÉPENSES

Frais d'impression des *Bulletins* n°s 183, 184, 185, 186, 187, 188	1 808 869
Frais de secrétariat et de gestion	91 124
Abonnement à la Société Mathématique	500
Total des dépenses	1 900 493
Actif au 14 mars 1958	1 972 663

L'actif comprend un fonds de réserve de 5 930 francs concernant 33 rachats de cotisations.

Les cotisations encaissées ce jour sont au nombre de 2 597. Comme 2 463 membres ont cotisé l'an passé, le développement de l'A.P.M. s'est poursuivi normalement et cela malgré l'augmentation de la cotisation.

Au terme de son mandat, le Trésorier tient à remercier les Collègues. qui lui ont facilité la tâche, en renouvelant leur adhésion avant le 1er décembre. Malheureusement, au 21 décembre plus de quatre cents Collègues avaient omis de le faire. Cette négligence a coûté près de 25 000 francs à la caisse de l'A.P.M., car les envois séparés des *Bulletins* ne bénéficient pas des tarifs postaux réduits. Dans cette évaluation n'est pas compris le coût de la circulaire, ni le temps passé par le Secrétaire. Trois Collègues sont à remercier parmi ces retardataires, car ils ont majoré leur virement.

Les remerciements du Trésorier vont aussi aux membres rachetés, qui ont bien voulu faire un versement à la caisse de l'A.P.M.

Le secrétariat a envoyé des rappels à un certain nombre de Collègues, qui n'avaient viré que 600 francs. Cette complication aurait pu être évitée au Bureau, car il semblait que les avis parus dans le *Bulletin* étaient explicites quant au montant de la cotisation, et à la date de son paiement.

Il est à souhaiter, pour l'avenir, que les Collègues mutés n'omettent pas d'indiquer leur ancienne adresse, car les homonymies sont nombreuses, et dans l'incertitude le secrétariat doit envoyer deux *Bulletins*.

En respectant ces conseils, les frais seront limités, et le taux de la cotisation pourra être maintenu, mais la répercussion des circonstances économiques pourrait être ressentie dans les frais d'impression des *Bulletins*. Le Trésorier croit indispensable de demander à l'Assemblée générale : 1° l'autorisation pour le Bureau d'augmenter éventuellement la cotisation pour la prochaine année scolaire, étant entendu que cette décision serait prise dès le 1er octobre ; 2° d'accepter que les Collègues retraités versent une cotisation réduite qui serait celle des élèves-professeurs.

Votes B 1 et B 2, page 3 de l'encart.

Vœux pour l'Assemblée générale

1. *Activité des Régionales.*

L'Assemblée générale de l'A.P.M., reconnaissant l'intérêt d'une activité locale de recherche et d'information pédagogique, souhaite que des initiatives soient prises, partout où ce sera possible, pour organiser des rencontres entre professeurs de Mathématiques enseignant à divers niveaux.

L'Assemblée générale demande au Bureau d'aider dans toute la mesure de ses moyens la constitution organique des Régionales de l'A.P.M. et de leur fournir les suggestions utiles pour un programme coordonné d'études.

2. *Liaisons internationales.*

L'Assemblée générale de l'A.P.M. émet le vœu que les rencontres internationales d'été donnent aux responsables de l'A.P.M. l'occasion de renforcer les liens entre Associations pédagogiques semblables des divers pays. Elle recommande de prendre toute initiative pour l'organisation permanente de ces liaisons, soit sous la forme d'une fédération, soit sous la forme d'un comité de liaison.

3. *Formation des maîtres.*

L'Assemblée générale de l'A.P.M. approuve le vote émis par son Président au sujet du rapport d'ensemble de la Commission Ministérielle.

En particulier, elle s'oppose à la création d'un cadre nouveau de professeurs possédant la seule propédeutique complétée par une année de formation professionnelle et reprend à son compte les « recommandations » présentées à la Commission Ministérielle : mesures d'urgence à caractère essentiellement provisoire.

4. *Horaires.*

L'Assemblée générale de l'A.P.M. exprime sa satisfaction pour la première amélioration de l'horaire des classes du premier cycle réalisée en octobre 1957. Elle rappelle que cette étape doit être suivie d'autres réformes pour atteindre l'objectif des quatre heures hebdomadaires. Compte tenu des difficultés de recrutement des maîtres, elle souhaite que l'horaire soit porté à quatre heures en classe de Troisième dès la rentrée 1958, l'heure ajoutée pouvant être consacrée à des séances de travail dirigé avec dédoublement des effectifs.

Lettre au public sur le recrutement des professeurs scientifiques

(transmise aux journaux *Le Monde, Le Figaro* et *Combat,* le 21-2-1958) (*)

Les professeurs de Mathématiques, de Sciences physiques et de Sciences naturelles de l'Enseignement Public s'étonnent de la publicité donnée dans la presse à un projet de professorat du premier cycle. Il leur semble qu'on a tôt fait à l'audience d'une seule opinion, de considérer comme acquise une mesure qui, de l'avis des professeurs qui enseignent à ce niveau du Second Degré classique, moderne et technique, porterait un grave préjudice au développement ultérieur des études scientifiques.

Recruter des professeurs possédant la seule propédeutique scientifique complétée par une seule année de formation pédagogique, c'est abaisser la qualification moyenne du personnel enseignant. C'est imposer aux jeunes gens qui accepteront d'entrer dans cette carrière des conditions de travail trop lourdes (d'autant plus qu'ils seront mal préparés à les supporter) pour qu'ils puissent poursuivre leurs études et accéder au cadre des professeurs licenciés certifiés. C'est donc tarir, au moins partiellement, la source déjà si rare des professeurs qualifiés. Par voie de conséquence, c'est compromettre le recrutement des agrégés.

(*) Aucun de ces journaux n'a cru bon de la reproduire. Seule *L'Education Nationale* du 6 mars l'a publiée.

Du seul point de vue pédagogique, c'est une erreur grave de croire que la propédeutique puisse qualifier ses titulaires pour un enseignement d'initiation dont dépend, dans une mesure essentielle, le niveau des études scientifiques ultérieures des élèves du Second Degré. Tel n'est d'ailleurs pas le but de la propédeutique, on semble l'oublier.

En créant aujourd'hui un nouveau cadre professoral, on peut donner l'illusion de « faire quelque chose » pour remédier au manque de professeurs ; ces mesures seront avantageuses pour les finances publiques, tout au moins dans l'immédiat, car ce nouveau personnel sera encore plus mal payé que le personnel actuel. Mais, en réalité, on aura sacrifié un capital intellectuel, on aura prolongé et aggravé la crise scientifique qui pousse peu à peu la France au rang des pays sous-développés.

Pour remédier dès aujourd'hui au manque de professeurs, nos Associations ont proposé au Ministre de l'Education Nationale des mesures d'urgence *à caractère provisoire* (nous soulignons ; à situation exceptionnelle, mesures exceptionnelles, mais n'improvisons pas des structures « définitives » qui ne résisteront pas à l'expérience de quelques années). Voici quelques-unes de ces mesures d'urgence : appel à l'effort accru et justement rétribué du personnel titulaire (le public ignore peut-être que les heures supplémentaires faites par certains professeurs leur sont payées à peine plus de la moitié d'une heure normale...), avantages accordés aux retraités qui accepteraient d'assurer des services complets ou partiels, affectation spéciale pour l'enseignement des jeunes gens diplômés pendant une durée au moins égale à celle de leur service militaire, et enfin, délégation provisoire d'étudiants non licenciés, un service très allégé laissant à ces jeunes gens le temps matériel de poursuivre et achever leurs études de licence.

A notre connaissance, le Ministre de l'Education Nationale n'a pas encore décidé quelles mesures il adopterait. Le Conseil Supérieur de l'Education Nationale n'a d'ailleurs pas été encore consulté. Il est donc prématuré de présenter comme un projet en voie de réalisation ce qui n'est qu'une proposition, à notre avis fort contestable, et qui rencontrerait, si elle était finalement retenue, l'opposition de la plupart des professeurs de l'Enseignement du Second Degré classique, moderne et technique.

G. Walusinski, *Président de l'Association des Professeurs de Mathématiques.*
M. Eurin, *Président de l'Union des Physiciens.*
M. Oria, *Président de l'Union des Naturalistes.*

Paris, le 20 février 1958.

Circulaire d'information sur les stages régionaux de Mathématiques

I. — L'organisation de ces stages, décidée par la Direction du Second Degré sans consultation préalable de l'A.P.M., a été annoncée lors d'un stage sur la recherche pédagogique (Sèvres, 25-28 septembre 1957). Un projet de questionnaire a été alors improvisé par les rares professeurs de Mathématiques présents (la proportion des professeurs de Mathématiques convoqués à ce stage était très faible ; personnellement, j'ai participé à deux séances et ai été empêché de participer aux autres par les oraux de bachot). Ce questionnaire, revu et complété par la Direction, a paru dans le *B.O.* n° 39 du 31 octobre 1957.

II. — La Direction du Second Degré ayant sollicité notre concours pour l'organisation de ces stages, nous avons cru devoir le faire. Personnellement je trouve excellent que des moyens soient mis par l'Administration à la disposition des profes-

seurs pour que ceux-ci puissent confronter leurs expériences (idée de la « formation pédagogique continue »). Remettre périodiquement en cause les principes de notre pédagogie est la seule manière d'en garantir la validité.

Quelques Collègues et moi-même avons ainsi participé à des réunions préparatoires à l'Institut Pédagogique National pour la mise au point du matériel et le choix des documents à présenter lors des stages. Un rapport sur les locaux, leur aménagement et sur le matériel d'enseignement, mis au point par le service de la recherche pédagogique, sous la direction de M. GAL et avec la collaboration de M. BIGUENET et de moi-même, doit d'ailleurs être distribué aux participants, lors des stages.

Il est bon de préciser que, par cette participation, aucun d'entre nous n'entendait *engager* l'ensemble des Collègues. Dans un travail général de recherche et de discussion, nous apportions seulement notre contribution et sollicitions les critiques et les suggestions.

Je tiens à préciser que j'ai rencontré, auprès de M. VACQUIER, chargé par la Direction générale de l'organisation de ces stages, le meilleur accueil et le souci évident de respecter l'esprit d'une circulaire de M. BRUNOLD, qui disait : « Il est évident qu'aucun progrès notable ne peut être réalisé sans la collaboration active et l'adhésion de l'ensemble du personnel. »

III. — La désignation des Collègues participant aux stages a été faite par l'Administration ; les principes d'organisation, exposés, leçons et discussions, ont été arrêtés par elle ; la désignation des rapporteurs est également son fait et l'A.P.M. a été complètement étrangère à toutes les désignations.

Nous avons seulement souhaité que ces réunions au chef-lieu de l'Académie soient, pour les Collègues membres de l'A.P.M., l'occasion d'organiser ou de mieux organiser nos « Régionales ».

IV. — Des circonstances imprévues me conduisent à donner ces précisions et à ajouter quelques suggestions (formulées à titre personnel).

Comme je l'ai indiqué dans le *Bulletin* 188, j'ai participé aux travaux d'une Commission nommée par le Ministre pour s'occuper des problèmes de recrutement. Un projet de création d'un professorat du premier cycle méritait notre attention particulière. Mandaté par les Bureaux réunis de l'A.P.M., des Physiciens et des Naturalistes, j'y ai fait opposition en présentant un contre-projet de *mesures provisoires* susceptibles de fournir au moins partiellement du personnel pour les postes actuellement non pourvus sans compromettre de façon durable les bases de notre enseignement scientifique.

Dans sa réunion de conclusion du 3 février, la Commission a rejeté notre contre-projet et proposé au Ministre de recruter par *concours*, et de titulariser, un personnel scientifique doté de la seule propédeutique. (Une année de formation pédagogique est envisagée).

Je pense qu'on ne peut favoriser le développement des études scientifiques en créant, au niveau de l'initiation, une sorte de goulot d'étranglement qui risque de tarir au moins partiellement les sections scientifiques du second cycle. C'est pourquoi j'ai voté contre l'ensemble du rapport de la Commission ; je suis persuadé que l'enseignement scientifique ne peut être amélioré que dans son ensemble et en respectant son unité.

V. — Ces circonstances peuvent-elles avoir une incidence sur les stages ? Une première question peut être posée : pourquoi se préoccuper de perfectionner la formation pédagogique des professeurs certifiés ou agrégés, alors qu'on se prépare à titulariser un personnel sans qualification scientifique suffisante ? Je suggère que cette remarque soit faite au début de chaque stage.

D'autre part, un rapport général sur chaque stage est envisagé. Je suggère que ce rapport, dont le contenu pédagogique peut être d'un grand intérêt, soit réservé à l'A.P.M., qui s'engage à le publier dans son *Bulletin*. Par contre, le rapport transmis

par la voie hiérarchique à la Direction Générale du Second Degré pourrait se limiter à protester contre toute mesure qui prétendrait résoudre la crise de recrutement en sacrifiant la première initiation.

Je rédige la présente note sous ma seule responsabilité, faute d'avoir pu encore réunir le Bureau de l'A.P.M. Les dernières réunions du Comité m'assurent que l'opinion générale des Collègues est très voisine de la mienne. Un rapport détaillé paraîtra dans le prochain *Bulletin* et notre Assemblée générale décidera en pleine indépendance de l'action à mener.

Le 5-2-58, G. W.

Lettre à Monsieur le Ministre de l'Éducation Nationale

MONSIEUR LE MINISTRE,

Les professeurs de Mathématiques de la Régionale de Nancy de l'A.P.M.E.P. apprenant que le corps des professeurs de Mathématiques de l'Enseignement du Second Degré, agrégés et certifiés, est sur le point de connaître une extension par la création d'un personnel scientifique doté de la seule propédeutique et d'une année de formation pédagogique, ont l'honneur d'exprimer à M. le Ministre leur étonnement d'apprendre qu'au moment même où le niveau scientifique de la France est, de constatation générale, insuffisant, une initiative officielle en élaboration tende à l'aggraver :

1° en diminuant l'ensemble de la qualité du personnel enseignant ;

2° en compromettant la formation scientifique dès sa base et en paralysant ainsi l'effort ultérieur des professeurs du deuxième cycle ;

3° en tarissant dès maintenant une source importante des licenciés et des agrégés par l'appel massif aux étudiants désireux de gagner rapidement leur existence ;

4° en introduisant dans le corps enseignant du Second Degré des éléments insuffisamment formés qui l'encombreront lorsque avant dix ans le mouvement démographique amènera des recrues de valeur et nombreuses qu'il faudra réduire alors aux tâches subalternes ou au chômage.

Ils expriment en outre le vœu que soient d'abord exploitées systématiquement moyennant un assouplissement de certains décrets et lois, les sources en personnel qualifié, telles que certains étrangers titulaires de diplômes français ou reconnus équivalents ; les professeurs retraités auxquels on offrait un service partiel de même qu'aux femmes actuellement démissionnaires ou en congé de longue durée et aux étudiants déjà licenciés, et pour ces derniers un maximum de six heures paraît souhaitable. Enfin, pour que, dans tous les cas, les mesures prises soient provisoires et ne barrent pas l'avenir de notre jeunesse qui monte.

En vous priant, Monsieur le Ministre, de prendre en considération les vœux de notre Régionale, je vous prie d'agréer, Monsieur le Ministre, l'expression de mon respectueux dévouement.

Le Correspondant régional : R. MOUGENOT.

Nancy, le 17 février 1958.

A titre d'information.

Texte adopté le 19 février 1958 par le Congrès de la Fédération Nationale des Etudiants en Sciences :

« Considérant la nécessité d'une meilleure utilisation des compétences dans l'Enseignement du Second Degré, considérant d'autre part la pénurie d'enseignants scientifiques ayant une formation pédagogique, considérant que par exemple l'enseignement scientifique donné dans les Cours Complémentaires par des instituteurs se révèle valable lors de la confrontation des élèves dans le deuxième cycle du Second Degré, mandate le Bureau pour demander que soit réservé à des professeurs recrutés sur concours au niveau des propédeutiques l'enseignement du premier cycle (Sixième à Troisième), à des professeurs licenciés et recrutés sur concours pédagogiques l'enseignement du deuxième cycle (2e au deuxième baccalauréat), et enfin que les professeurs agrégés se chargent des classes terminales et propédeutiques et puissent aussi exercer dans la recherche. Les modalités d'accession à ces niveaux seront des concours pédagogiques inspirés du C.A.P.E.S., l'actuel certificat d'aptitude aux professorats des Enseignements Secondaires, en ce qui concerne les épreuves pratiques sanctionnant un stage de formation.

« Le passage d'un concours ne doit en aucun cas impliquer un engagement strict d'enseigner immédiatement, mais doit réserver la possibilité d'accession à des niveaux supérieurs. »

Les étudiants semblent espérer que les « professeurs du premier cycle » pourront continuer effectivement leurs études. « Si tu t'imagines, fillette... »

Réunion du Comité (23 janvier 1958)

Présents : Bay, Biard, Biguenet, Cassé, Chazal, Crozes, Durrande, Edde, Mlle Félix, Girard, Guitton, Legrand, Le Ménager, Mlle Marchand, Mlle Masson, Minois, Monjallon, Mougenot, Fouché, Siros, Mlle Vervaecke, Walusinski.

I. Informations sur les travaux de la « Commission ministérielle... ». — Le Président et Durrande nous exposent un résumé de ces travaux : la Commission s'est réunie deux fois par semaine depuis le 22 novembre ; rappelons qu'elle comprend les Directeurs, des Inspecteurs généraux, des membres du Supérieur, Durrande et Walusinski. Son objet essentiel est d'abord une réforme du mode de recrutement des professeurs.

L'Agrégation, en particulier, serait modifiée, le président de son jury serait un membre du Supérieur, mais Walusinski a proposé, ce qui serait, au moins plus souple, que ce soit une personnalité « incontestable et incontestée ». Les agrégés seraient casés dans l'E.N., c'est-à-dire aussi bien dans le Supérieur et la Recherche que dans les Lycées, les Ecoles Normales et le Technique.

Professorat du premier cycle : Des renseignements sur cette question (ainsi que sur les licences) ont paru dans un précédent *Bulletin* ; nous n'y revenons que pour répéter les objections posées par l'A.P.M.

Si on crée un nouveau cadre, définitif, dont les membres seront surchargés de travail et mal payés, personne n'y viendra. Si c'est seulement une solution provisoire au problème du recrutement, il faut le préciser, et alors voici plusieurs moyens proposés par l'A.P.M. :

1) payer convenablement ;

2) offrir un service partiel aux étudiants pendant quelques années (cinq ans par exemple) durant lesquelles ils devront en même temps préparer les concours de recrutement ; s'ils y réussissent leur temps déjà fait sera validé ;

3) maintenir en fonction les retraités, en rendant possible le cumul ;

4) offrir un demi-service aux femmes ;

5) mettre en « affectation spéciale » les jeunes professeurs pendant leur temps de service militaire (service civil non rétribué).

Une longue observation, faite par Bay : l'Agrégation devrait rester notre concours de recrutement, et sa présidence devrait rester confiée à l'un des nôtres, car l'Enseignement Supérieur ne connaît, ni nos difficultés, ni nos besoins. Mais il semble difficile d'empêcher le Supérieur de rechercher les agrégés, et il ne faut pas le laisser instituer une « super-agrégation ».

II. Questions diverses. — L'Assemblée générale est fixée au 30 mars à 8 h. 30.

Il y a aujourd'hui 2 468 cotisations (augmentation). Il y a de l'argent en caisse, mais tout augmente, il faudrait « indexer » la cotisation, il sera difficile de ne pas l'augmenter.

Des dispositions sont prises pour favoriser l'activité des Régionales. D'autre part des stages officiels sont prévus en province et à Paris.

Horaires et programmes : rien de nouveau ; il faudra demander une quatrième heure en Troisième.

J. Siros.

A. TRESSE (1868-1958)

Nous avons eu le regret d'apprendre le décès de M. A. Tresse, Inspecteur général honoraire de l'Instruction Publique. Plusieurs membres du Comité ont pu assister aux obsèques, le 8 février 1958, et apporter à la famille de M. Tresse les condoléances de toute l'A.P.M.

Nous ne pouvons mieux faire ici, pour rendre au disparu l'hommage qui lui est dû, que reproduire les simples et émouvantes paroles prononcées sur sa tombe par M. l'Inspecteur général Desforge :

« *Dès sa sortie de l'Ecole Normale Supérieure, jeune agrégé, il entreprit des recherches sous la direction de l'illustre mathématicien* Sophus Lie, *et sa thèse de doctorat, soutenue en novembre 1893, lui aurait certainement permis d'accéder rapidement à une chaire de Faculté, s'il n'avait choisi de faire carrière dans l'Enseignement Secondaire.*

« *Ce que fut son action, dans les importantes classes de Spéciales qui lui furent confiées, ainsi qu'à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud, tous ceux qui ont été ses élèves peuvent en témoigner, tant était grande l'influence qu'il exerçait, tout naturellement, par la qualité de son enseignement et par l'exemple. Car il a été de ces hommes qui, portant en eux de grandes forces spirituelles et morales, les font rayonner autour d'eux, et donnent ainsi, sans ostentation, à ceux qui les approchent, les éléments d'une formation complète.*

« *Appelé en 1926 à l'Inspection générale,* M. Tresse *sut, dans ses nouvelles fonctions, mettre au service de l'Administration et des professeurs, dont beaucoup avaient été ses élèves, son expérience très sûre, sa compréhension profonde des valeurs humaines, et, cela va sans dire, sa haute qualité scientifique.*

« *Sa retraite, prise peu avant la dernière guerre, ne ralentit point son activité ; je n'en citerai comme exemple que la mise au point d'un important mémoire sur les géométries non-euclidiennes, actuellement en cours de publication.*

« *Le beau foyer qu'il avait fondé voilà plus de soixante ans a été frappé, il y a quelques mois, par une terrible épreuve, qui avait touché notre ami au plus intime de l'être.* »

Le bloc-notes de l'A.P.M.

● **Congrès international d'Edimbourg.** — Sur l'invitation de la Municipalité et de l'Université d'Edimbourg et de la Société Royale de Londres, le Congrès internationale des mathématiciens aura lieu à Edimbourg du 14 au 21 août 1958. Son Altesse Royale, le duc d'Edimbourg, a bien voulu accepter d'honorer le Congrès de son très haut patronage.

Le Comité d'organisation se propose d'inviter un certain nombre de mathématiciens à faire des conférences d'une heure ou d'une demi-heure. Il y aura aussi des réunions quotidiennes consacrées à la présentation de communications d'un quart d'heure.

Le Congrès comprendra huit sections :

1. Logique et fondement des Mathématiques.
2. Algèbre et théorie des nombres.
3. Analyse.
4. Topologie.
5. Géométrie.
6. Calcul des probabilités et statistique.
7. Mathématiques appliquées, physique mathématique et analyse numérique.
8. Histoire et enseignement.

Le Comité prévoit pendant la durée du Congrès une série de manifestations diverses : réceptions, réunions d'ordre récréatif, excursions.

Le Congrès comportera deux catégories de membres :

Membres ordinaires, ayant le droit de participer à toutes les activités, scientifiques et autres, du Congrès et de recevoir les Comptes rendus.

Membres associés, accompagnant des membres ordinaires et jouissant de la plupart des privilèges de ceux-ci, mais ne prenant aucune part aux activités scientifiques et ne recevant pas les Comptes rendus.

La Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique se réunit, dans le cadre du Congrès, pour traiter les trois thèmes : 1° L'enseignement des Mathématiques jusqu'à l'âge de 15 ans. 2° Les bases scientifiques des Mathématiques dans l'Enseignement Secondaire. 3° Etude comparée des méthodes d'initiation à la géométrie.

La participation de nombreux Collègues de l'A.P.M. à ces réunions est souhaitable. Une contribution de l'Administration aux frais d'un tel voyage semble cependant difficile à obtenir.

● **Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques** (Président : G. Choquet ; Vice-Président : J. Piaget ; Secrétaire : C. Gattegno ; Secrétaire européen : W. Servais).

XIIe Rencontre internationale de professeurs de Mathématiques, du 5 au 12 août 1958, à Saint Regulus Hall, The University, Saint Andrews (Ecosse).

Thème : « La question des problèmes dans l'enseignement des Mathématiques ».

PROGRAMME

5 août, mardi : Matin : Arrivée des participants et installation. Après-midi : conférence d'ouverture et discussion. Soirée : Réunion. — *6 août, mercredi :* Matinée libre. Après-midi : Les composantes du problème. Etude psychologique. Soirée : Réunion. — *7 août, jeudi :* Matin : Les composantes du problème. Etude morphologique. Après-midi : Discussion. Soirée : Réunion. — *8 août, vendredi :* Excursion en

car, visite des lochs dans les Highlands. Soirée : Continuation de la discussion de la veille. — *9 août, samedi :* Matin : Y a-t-il une pédagogie du problème. Après-midi : Discussion des réponses aux divers niveaux scolaires. Soirée : Réunion. — *10 août, dimanche :* Matinée et après-midi : Travail par groupes. Esquisses de vrais problèmes. Soirée : Réunion. — *11 août, lundi :* Matinée et après-midi : Discussion des rapports et exemples. Soirée : Conclusions. — *12 août, mardi matin :* Départ.

Coût : £ 10 (dix) pour la semaine, tout compris. Chambres individuelles ou pour couples. — *Inscriptions :* Auprès de M. W. SERVAIS, 60, rue des Déportés, Morlanwelz (Belgique). £ 3 à verser en dépôt à l'inscription. Le nombre des places est limité à 50. — *Repas :* Petit déjeuner, 8 h 30 ; déjeuner, 13 heures ; thé, 16 h 30 ; dîner, 19 h 30. — *Trains :* D'Edimbourg presque toutes les demi-heures (pas de train le dimanche ; le voyage dure de 2 à 2 h 30 ; premier, 7 h 30 ; dernier, 20 h 34.

● **Anciens « Bulletins ».** — Le *Bulletin* n° 177 de mai 1956 est complètement épuisé ; il ne peut être fourni à des nouveaux membres qui le demandent. Si certains Collègues voulaient bien s'en dessaisir, ils rendraient donc service à la communauté des professeurs. D'avance merci.

● **Erratum.** — Dans l'article de M. KOURGANOFF sur l'enseignement des langues aux scientifiques (*Bulletin* 188), à la 4e ligne de la page 138 il fallait lire « songe creux ».

ÉDITIONS CHARLES - LAVAUZELLE & Cie
PARIS-24, Bd Saint-Germain - LIMOGES - NANCY

Nouveautés

R. ECHARD
Inspecteur d'Académie

MATHÉMATIQUES

Cours Complémentaires - Enseignement Moderne Court

Classe de 6e - Un volume 15 × 22 cm. de 197 pages ..... 490 F
Classe de 5e - Un volume 15 × 21 cm. de 167 pages ..... 425 F

Textes accompagnés de très nombreuses figures claires et d'exercices variés classés par chapitres.

L'ouvrage écrit pour les Cours Complémentaires et l'Enseignement Moderne Court peut être utilisé dans toute les classes de sixième et de cinquième. Il s'adresse à des débutants pour qui seuls les éléments concrets sont directement accessibles, aussi l'auteur s'est efforcé de leur inspirer confiance dans le réalisme des mathématiques, en partant toujours de notions dont ils ont l'expérience, pour les diriger et les élever progressivement à se mouvoir d'eux-mêmes dans les abstractions.

Printed in France — *Le Gérant :* G. WALUSINSKI.

Cahors, Imp. A. Coueslant. — 92.239. — Dépôt légal : I-1958

Vient de paraître :

COLLECTION UNIVERSITAIRE DE MATHEMATIQUES

INTRODUCTION

A

L'ALGÈBRE ET L'ANALYSE

MODERNES

PAR

M. ZAMANSKY

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
Maître de conférences à l'Ecole Polytechnique.

350 pages 16 × 25, 1958. Relié toile sous jaquette ..... **2 900 F**

En librairie et chez

DUNOD 92, Rue Bonaparte-PARIS 6e -- C.C.P. 75-45

GEO-MONTAGE

49 Boulevard Diderot
Paris 12e
C.C.P. PARIS 14 868 23

MATÉRIALISE L'ABSTRAIT

Construction rapide d'une figure géométrique à trois dimensions

Recommandé par le ministère de l'Éducation Nationale

PRENEZ LA COMMANDE DE VOS ÉLÈVES

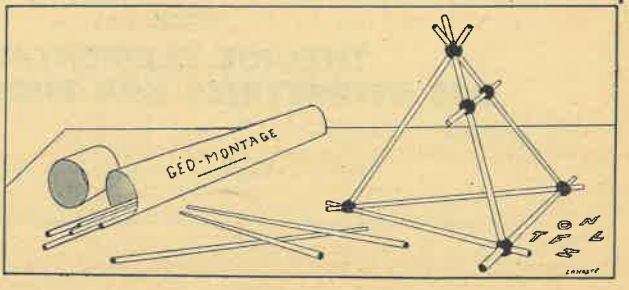
REDUCTION DE 10 % POUR CLASSE ENTIERE (15 unités minimum)

Prix unitaire :

- **650 F - Paiement à la commande**
- **750 F - Contre remboursement**

Adressez directement vos commandes à :

Geo-Montage



GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Gds-Augustins

PARIS VIe — DANton 05-10

COSTA DE BEAUREGARD (O.)

THEORIE SYNTHETIQUE DE LA RELATIVITE RESTREINTE ET DES QUANTA

In-8° (16-25), XII-200 pages, avec figures (1957) (Collection les Grands Problèmes des Sciences) ..... **3.800 F**

HENKIN (Léon)

LA STRUCTURE ALGEBRIQUE DES THEORIES MATHEMATIQUES

In-8° (16-25), 52 pages (1956) (Collection Logique Mathématique, Volume XI) ..... **900 F**

LECLERCQ (René)

GUIDE THEORIQUE ET PRATIQUE DE LA RECHERCHE EXPERIMENTALE

In-8° (16-25), 133 pages avec figures (1958), cartonné ..... **1.400 F**

PELTIER (Jean)

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS ALGEBRIQUES

In-8° (14-23), VIII-244 pages, 18 figures (1957) (Collection Manuels Techniques, Vol. III) ..... **2.500 F**

POLYA (G.)

LES MATHEMATIQUES ET LE RAISONNEMENT « PLAUSIBLE »

Préface de M. Louis COUFFIGNAL, Traducteur R. VALLEE. In-8° (16-25), XV-300 pages, nombreuses figures, relié toilé ..... **3.200 F**

TRESSE (A.)

THEORIE ELEMENTAIRE DES GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES

In-8° (16-25), 150 pages (1957) ..... **2.500 F**

Notices détaillées envoyées sur demande

La LIBRAIRIE VUIBERT, 63, Bd St-Germain, PARIS-5e

met à la disposition des professeurs, des parents, des éducateurs et des élèves, ses périodiques mathématiques. Ils complètent efficacement les cours et servent utilement les élèves par l'entraînement aux exercices et problèmes.

Numéro spécimen envoyé sur simple demande

L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE

60e ANNÉE 1957-58

Journal bimensuel paraissant du 1er octobre au 15 juillet, rédigé par MM. A. MONJALLON, R. CAHEN, A. COMBES et P. BACCHUS

Chaque numéro contient des problèmes proposés (mathématiques et sciences physiques) et leur solution. Il s'adresse aux élèves depuis la Quatrième jusqu'à la Première.

Abonnement annuel, France: **1 000 F** - *Etranger:* **1 100 F**

Le Journal de MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

82e ANNÉE 1957-58

Journal bimensuel paraissant du 1er octobre au 15 juillet, fondé en 1877 par H. VUIBERT, rédigé par MM. A. BENOIT, A. COMBES, E. MAREC, A. MONJALLON et P. BACCHUS

Il s'adresse aux candidats au Baccalauréat et à différents concours (Saint-Cyr, A. et M., etc...).

Abonnement annuel, France: **1 000 F** - *Etranger:* **1 100 F**

La Revue de MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

68e ANNÉE 1957-58

Revue mensuelle, rédigée par M. A. HENNEQUIN et MM. P. BACCHUS et G. FLORY

La Revue s'adresse d'une part aux candidats à l'Agrégation, aux écoles Polytechnique et Normale supérieure, d'autre part aux élèves de Mathématiques supérieures et spéciales candidats aux concours.

Abonnement annuel, France: **2 000 F** - *Etranger:* **2 100 F**

MAISON D'EDITIONS AD. WESMAEL-CHARLIER, S.A.
NAMUR (Belgique)

Correspondant en France :

Éditions WESMAEL-CHARLIER

Capital : 3.500.000 F — S.A.R.L. — R.C. Seine 57.B.8613

30, rue de Gramont

PARIS 2e

Extrait du

Catalogue général

Collection HERBIET

Leçons de Trigonométrie

118 pages, 74 figures

Trigonométrie Rectiligne

246 pages, 123 figures

Trigonométrie Sphérique

56 pages, 33 figures

Exercices de Trigonométrie

752 pages, 327 figures

CATALOGUE GRATUIT SUR DEMANDE

ÉDITIONS DE GIGORD, 15, rue Cassette, PARIS-VIe

Nouvelle collection de Mathématiques

par Pierre BOUTIN

Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure
Professeur agrégé au Lycée Janson-de-Sailly

Sous presse :

MATHEMATIQUES, classe de Sixième (nouveau programme) .....
GEOMETRIE, classes de Seconde C et Moderne .....

Parus antérieurement :

MATHEMATIQUES, classe de Cinquième	**700 F**
MATHEMATIQUES, classe de Quatrième	**850 F**
MATHEMATIQUES, classe de Troisième	**950 F**

Prix respectifs des livres du maître : **700, 900, 980** et **1.950 F.**

★

ARITHMETIQUE, classes de Cinquième, Quatrième et Troisième	**800 F**
ALGEBRE, classes de Quatrième et Troisième	**800 F**
GEOMETRIE, classes de Cinquième, Quatrième et Troisième	**1 050 F**

Ces trois volumes contiennent à la fois le programme de l'enseignement du second degré et celui des cours complémentaires.

Les livres du maître sont ceux des Mathématiques, classes de Cinquième, Quatrième, Troisième, munis d'une TABLE DE CONCORDANCE.

DELAGRAVE

Nouveautés

COURS DE MATHEMATIQUES
H. SCHAEFFER-J. LEBAILE

MATHÉMATIQUES, Classe de 3[e]

Un vol. 15,5 × 21,5 de 408 pages. Br. 840 » Cart. 990 »

ARITHMÉTIQUE, Cl. de 6e, avec supplément

Un vol. 15,5 × 21,5 ..... Br. 480 » Cart. 600 »

Supplément à l'ARITHMÉTIQUE, Cl. de 6[e]

Br. 120 »

Les ouvrages de MATHÉMATIQUES les plus répandus

C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY
Agrégés de Mathématiques

COURS DE MATHEMATIQUES

NOUVEAUX PROGRAMMES :

De nouvelles éditions, entièrement conformes aux nouveaux programmes, sont en cours d'impression. Le volume de 6e sera disponible au début du 3e trimestre ; il sera suivi de près par le volume de 5e.
D'autre part, à l'intention des Etablissements qui auraient quelque peine, faute de crédits, à remplacer les volumes, nous publions un fascicule comprenant, non seulement les éléments d'Astronomie exigés par le nouveau programme, mais également tous les Travaux Pratiques qui permettront, avec l'ouvrage actuel de 6e, de répondre aux exigences des nouveaux horaires.

Lycées et Collèges :

CLASSE DE SIXIEME : Arithmétique et Dessin géométrique	**360**
CLASSE DE CINQUIEME : Arithmétique, Algèbre, Géométrie	**420**
CLASSE DE QUATRIEME : Arithmétique, Algèbre, Géométrie	**440**
CLASSE DE TROISIEME : Arithmétique, Algèbre, Géométrie	**475**
CLASSE DE SECONDE : Algèbre	**475**
CLASSE DE SECONDE : Géométrie plane	**505**
CLASSE DE SECONDE (A et B) : Algèbre et Géométrie	**590**
CLASSE DE PREMIERE : Géométrie dans l'espace	**535**
CLASSE DE PREMIERE : Algèbre et Trigonométrie	**505**
CLASSE DE PREMIERE (A et B) : Algèbre et Géométrie	**550**
CLASSE DE MATHEMATHIQUES : Géométrie	**1 200**

FERNAND NATHAN-ÉDITEUR

MASSON & Cie, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e^

NOUVEAUTÉS :

COURS DE MATHÉMATIQUES G. CAGNAC ET L. THIBERGE

GÉOMÉTRIE

Classe de Mathématiques

par

J. COMMEAU

Professeur agrégé au Lycée Kléber, à Strasbourg

Un fort volume (15,5 × 21,5) de 530 pages, avec nombreuses figures, exercices et problèmes, broché fort ..... **2 980 F**

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

H. COMMISSAIRE — **G. CAGNAC**

Anciens Professeurs de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand

I*

ALGÈBRE LINÉAIRE

(Complément au TOME Ier-Programmes 1956)

par

G. CAGNAC

Inspecteur général de l'Instruction Publique

Un volume in-8° de 192 pages, avec figures et exercices ; br. ..... **2 250 F**

LAURENT SCHWARTZ

THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

Tome I..... 1.800 F.

Deuxième édition revue et corrigée

Tome II..... 1.500 F.

La Théorie des Distributions **de Laurent Schwartz utilise pour un grand nombre de démonstrations des outils mathématiques assez perfectionnés comme les espaces vectoriels topologiques. Son utilité apparaît en physique où elle rend corrects de nombreux procédés et formules, et dans les mathématiques appliquées où elle permet de résoudre les équations aux dérivées partielles.**

PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DE MATHÉMATIQUE

DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

dans la collection

ACTUALITES SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

I. A. WEIL. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. A.S.I. 551, 40 pages ..... 150 F

II. Ch. DE LA VALLÉE-POUSSIN. Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet. A.S.I. 578, 48 pages ..... 180 F

III. H. CARTAN. Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives. A.S.I. 867, 36 p. 190 F

IV. A. WEIL. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. A.S.I. 1145, 164 pages ..... 1.560 F

V. L. SCHWARTZ. Etude des sommes d'exponentielles réelles et imaginaires. En préparation

VI. J. DIEUDONNÉ. Sur les groupes classiques. A.S.I. 1040, 84 pages.

VII. A. WEIL. Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. A.S.I. 1041, 88 pages ..... 390 F

VIII. A. WEIL. Variétés abéliennes et courbes algébriques. A.S.I. 1064, 168 p. 1.105 F

IX. L. SCHWARTZ. Théorie des distributions. Tome I. A.S.I. 1245, 164 pages .... 1.800 F

X. L. SCHWARTZ. Théorie des distributions. Tome II. A.S.I. 1122, 172 pages .. 1.500 F

HERMANN

6, RUE DE LA SORBONNE, PARIS, V

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD

GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU

Professeurs au Lycée de Grenoble

PROGRAMMES DU 18 AVRIL 1947

TARIF JUIN 1957

	Taxe locale comprise
ARITHMÉTIQUE 6e *(Jusqu'à épuisement)*	**224 F**
ARITHMÉTIQUE 6e — Nouvelle édition mise à jour	**336 »**
Corrigé des exercices de 6e (correspondant à l'ancienne édition)	**305 »**
DESSIN GÉOMÉTRIQUE 6e et 5e	**188 »**
GEOMÉTRIE 5e et 4e	**505 »**
ARITHMÉTIQUE 5e *(jusqu'à épuisement)*	**356 »**
ARITHMÉTIQUE 5e. — Nouvelle édition mise à jour	**458 »**
Corrigé des exercices de 5e (correspondant à l'ancienne édition)	**305 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 4e	**336 »**
ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE 3e	**397 »**
GÉOMÉTRIE 3e	**387 »**
GÉOMÉTRIE 5e, 4e, 3e	**895 »**
(pour les Lycées, Collèges et Cours Complémentaires. Fort volume de 420 pages **cartonné).**	
COMPLÉMENTS d'ALGÈBRE et de GÉOMÉTRIE 3e MODERNE COURT.	**102 »**
ALGÈBRE 2e A.B.C.M.	**509 »**
GÉOMÉTRIE 2e A.B.C.M.	**550 »**
ALGÈBRE 1re A.B.	**295 »**
ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE 1re C.M.	**560 »**
GÉOMÉTRIE 1re A.B.C.M.	**509 »**

POUR LES EXAMENS :

QUESTIONS DE COURS DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT, 1re partie, A.B.C.M.	**427 »**
LES MATHÉMATIQUES AU B.E.P.C., 156 PAGES, NOMBREUX CLICHÉS	**417 »**

« Le professeur de mathématiques n'a pas à former de purs logiciens, il doit contribuer à façonner des hommes raisonnables et, pour cela, il lui faut s'occuper non seulement des raisonnements logiques mais encore de l'acquisition des prémisses de ces raisonnements et de l'application de leurs résultats au concret... Faute de bien indiquer le départ du concret et le retour au concret, on risquerait de faire acquérir aux élèves l'esprit géométrique dans le sens péjoratif du terme, de les inciter à raisonner imperturbablement à partir de données non assurées. Il faut faire concevoir aux élèves qu'en dehors des mathématiques on ne démontre rien mathématiquement et que, pourtant, la logique est utile en toutes circonstances. Les mathématiques ont été créées par les hommes pour leurs besoins et elles leur sont, en fait, un auxiliaire précieux ; le professeur de mathématiques doit rester un professeur d'action. »

Henri LEBESGUE
(La mesure des grandeurs).

La nouvelle collection

ACTION MATHÉMATIQUE

annonce

UN MANUEL :

« **Des formes, d'autres formes..., des mesures** ».
Manuel pour la classe de Sixième

DES CAHIERS :

- « **Graphiques** ».
  Cahier de travaux pratiques de mathématiques pour la classe de Sixième
- « **Le Soleil et les étoiles** ».
  Carnet d'observation astronomique pour les élèves de Sixième et de Cinquième

CLASSIQUES HACHETTE