

## ☞ Baccalauréat C international<sup>1</sup> juin 1989 ☞

### EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  et tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  est repéré par son affixe  $z = x + iy$ .

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives  $-1; 1; \frac{1}{2}$  et  $2$ .

À tout point  $m$  du plan d'affixe  $z, z \neq 2$ , on associe le point  $M$  d'affixe  $Z$  tel que :

$$Z = \frac{2z-1}{2-z}.$$

1. Déterminer l'ensemble  $E$  des points  $m$  d'affixes  $z$  tels que  $|Z| = 1$ .
2. Déterminer l'ensemble  $F$  des points  $m$  d'affixe  $z$  tels que  $\arg Z = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ .
3. Tracer les ensembles  $E$  et  $F$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique : 2 cm.
4. Exprimer, en fonction de  $z$ , le complexe  $U = \frac{Z-1}{Z+1}$ .  
En déduire que les quatre points A, B,  $m$ ,  $M$  sont cocycliques ou alignés.

### EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan orienté, ABCD et AEF G sont deux carrés tels que  $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$  et

$$(\vec{AE}, \vec{AG}) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

On désigne par M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [BD], [DE], [EG], [GB].

1. Montrer que MNPQ est un parallélogramme.
2. Soit  $R$  la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
Déterminer l'image du segment [BE] par cette rotation  $R$ .  
En déduire que MNPQ est un carré.
3. On désigne par  $l$  et  $m$  les longueurs respectives des côtés des carrés ABCD et AEF G.  
On pose  $(\vec{AB}, \vec{AE}) = \alpha, \alpha \in [0; 2\pi[$ .
  - a. Exprimer, en fonction de  $l, m$  et  $\alpha$ , la longueur des côtés du carré MNPQ.
  - b. Déterminer  $\alpha$  pour que l'aire du carré MNPQ soit maximale.

### PROBLÈME

12 POINTS

#### Partie A

---

1. Grèce, Maroc, Sénégal, Portugal, Tunisie

L'objet de cette partie est l'étude de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x),$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal

1. On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$\varphi(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

- a. Déterminer la dérivée  $\varphi'$  de la fonction  $\varphi$ .  
 b. Donner le sens de variation de  $\varphi$  puis le signe de  $\varphi$ .
2. Soit  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ .

- a. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = e^{-x} \left[ \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \right].$$

- b. En utilisant le 1., étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .
3. a. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) = xe^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x}).$$

En déduire la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

- b. Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .

$$\left( \text{On rappelle que } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1. \right)$$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  et tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

### Partie B

L'objet de cette deuxième partie est l'étude d'une suite définie à partir de  $f$ .

Les calculs seront effectués à la calculatrice.

1. Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une seule solution notée  $\alpha$ . Montrer que  $0,5 \leq \alpha \leq 0,6$ .  
 2. Démontrer que pour tout réel  $x$  tel que  $0,5 \leq x \leq 0,6$ , on a les deux encadrements :

$$0,5 \leq f(x) \leq 0,6 \quad \text{et} \quad -0,25 \leq f'(x) \leq 0$$

3. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

a. Démontrer que, pour tout nombre entier  $n$ ,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,25 |u_n - \alpha|$$

puis  $|u_n - \alpha| \leq (0,25)^n \times 0,1$ .

En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .

b. Déterminer un entier  $n_0$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur à  $n_0$ ,

$$|u_n - \alpha| \leq 5 \cdot 10^{-4}.$$

### Partie C

L'objet de cette partie est l'étude d'une primitive de  $f$ .

1. Montrer que, pour tout réel  $x$  :

$$f'(x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$$

2. Soit  $x$  un réel positif. En utilisant la question précédente calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Interpréter graphiquement  $I(x)$ . Déterminer la limite de  $I(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .