# Baccalauréat S 2009

# L'intégrale d'avril à novembre 2009

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2009 ∾

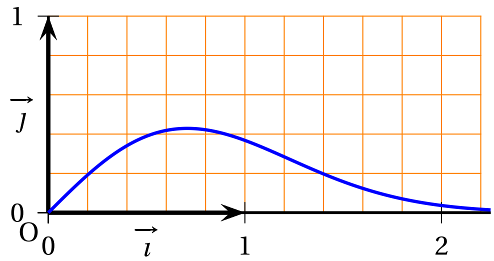
**EXERCICE 1** **7 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.




**Partie A**

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

   (On pourra écrire, pour $x$ différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}\Big)$.

   **b.** Démontrer que $f$ admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

2. Soit $a$ un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de $a$, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

   Quelle est la limite de $F(a)$ quand $a$ tend vers $+\infty$?

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On ne cherchera pas à expliciter $u_n$.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ différent de 0 et de 1

   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   **b.** Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ ?

   **c.** Montrer que la suite $(u_n)$ converge. Quelle est sa limite?

2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif $n$, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   **b.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour $n$ entier compris entre 3 et 7.

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $F(n)$ | 0,499 938 295 1 | 0,499 999 943 7 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |

Interpréter ces résultats.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - \text{i}, \quad b = 1 - 3\text{i} \text{ et } c = -1 - \text{i}.$$

1. **a.** Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   **b.** Quelle est la nature du triangle ABC ?
   **c.** Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle $\Gamma$ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit $M$ un point quelconque du plan d'affixe notée $m$ et $N$ le point d'affixe notée $n$, image de A dans la rotation $r$ de centre $M$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
   **a.** Donner l'écriture complexe de la rotation $r$.
   **b.** En déduire une expression de $n$ en fonction de $m$.
3. On appelle $Q$ le milieu du segment [A$N$] et $q$ son affixe.
   Montrer que : $q = \dfrac{(1-\text{i})m}{2} + 2 + \text{i}$.
4. Dans cette question, $M$ est un point du cercle $\Gamma$.
   **a.** Justifier l'existence d'un réel $\theta$ tel que : $m = \sqrt{10}\,\text{e}^{\text{i}\theta}$.
   **b.** Calculer $|q - 2 - \text{i}|$. Quel est le lieu $\Gamma'$ de $Q$ lorsque $M$ décrit le cercle $\Gamma$ ?

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_\text{A} = \text{i}$ et
$z_\text{B} = 1 + 2\text{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe $S$ telle que :

$$S(\text{O}) = \text{A} \text{ et } S(\text{A}) = \text{B}.$$

2. Montrer que l'écriture complexe de $S$ est :

$$z' = (1 - \text{i})z + \text{i}.$$

   Préciser les éléments caractéristiques de $S$ (on notera $\Omega$ le centre de $S$).

On considère la suite de points $(A_n)$ telle que :

- $A_0$ est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel $n$, $A_{n+1} = S\left(A_n\right)$.

On note $z_n$, l'affixe de $A_n$. (On a donc $A_0 = \text{O}$, $A_1 = \text{A}$ et $A_2 = \text{B}$).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $z_n = 1 - (1 - \text{i})^n$.
   **b.** Déterminer, en fonction de $n$, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.
   **c.** En déduire une construction du point $A_{n+1}$ connaissant le point $A_n$.
   Construire les points $A_3$ et $A_4$.
4. Quels sont les points de la suite $(A_n)$ appartenant à la droite $(\Omega\text{B})$ ?

**EXERCICE 3** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère les points :
A de coordonnées (1 ; 1 ; 0), B de coordonnées (2 ; 0 ; 3), C de coordonnées (0 ; −2 ; 5) et D de coordonnées (1 ; −5 ; 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

**Proposition 1 :** L'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

**Proposition 2 :** La transformation qui, à tout point $M$ de l'espace associe le point $M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}$ est l'homothétie de centre $G$, où $G$ désigne le barycentre du système {(A, 1), (B, 1), (C, 2)}, et de rapport 3.

**Proposition 3 :** A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

**Proposition 4 :** La sphère de centre Ω de coordonnées (3 ; 3 ; 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

**EXERCICE 4** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\dfrac{1}{3}$.

*Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   **a.** Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $X$ ?
   **b.** Quelle est son espérance ?
   **c.** Calculer $P(X = 2)$.
2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
   On considère les évènements D et A suivants :
   - $D$ « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - $A$ : « obtenir exactement deux 6 ».

   **a.** Calculer la probabilité des évènements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

**b.** En déduire que : $p(A) = \dfrac{7}{48}$.

**c.** Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

**3.** On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé $n$ fois de suite ($n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note $B_n$ l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces $n$ lancers successifs ».

**a.** Déterminer, en fonction de $n$, la probabilité $p_n$ de l'évènement $B_n$.

**b.** Calculer la limite de la suite $\left(p_n\right)$. Commenter ce résultat.

**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Amérique du Nord 4 juin 2009 ∽

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

### Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour $t$ appartenant à $[0;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après $t$ jours.
On a donc $y(0) = 0{,}01$.
On admet que la fonction $y$ ainsi définie sur $[0;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0{,}05y(10 - y).$$

1. On considère la fonction $z$ définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $z = \dfrac{1}{y}$.
   Démontrer que la fonction $y$ satisfait aux conditions
   $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05y(10-y) \end{cases}$
   si et seulement si la fonction $z$ satisfait aux conditions
   $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5z + 0{,}05 \end{cases}$
2. **a.** En déduire une expression de la fonction $z$ puis celle de la fonction $y$.
   **b.** Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

### Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le quart de la population est vacciné contre cette maladie contagieuse. De plus, on estime que sur la population vaccinée, 92 % des individus ne tombent pas malades. Sur la population totale, on estime aussi que 10 % des individus sont malades.
On choisit au hasard un individu dans cette population.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.
2. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

**EXERCICE 2** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

On supposera connus les résultats suivants :
Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout $x$ de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

**Partie B**

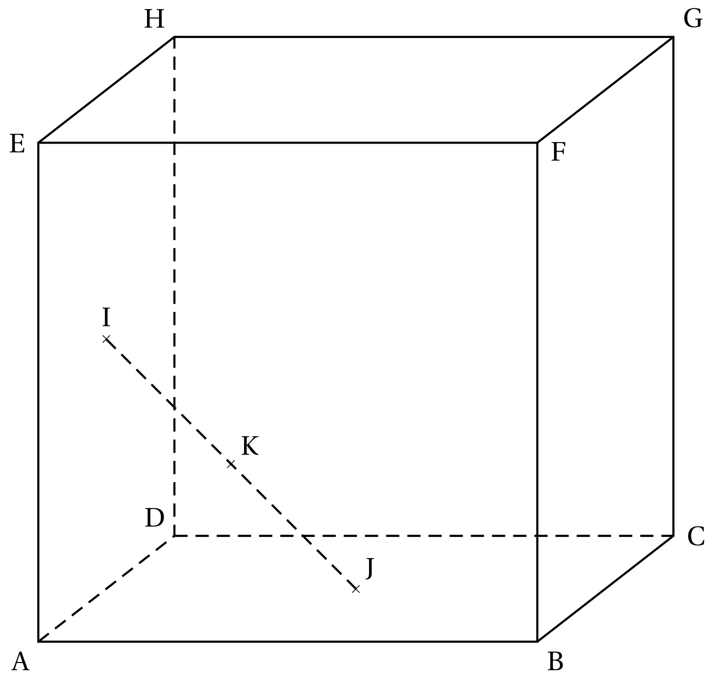
On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite $(u_n)$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{array}\right.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   **b.** En déduire que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.
2. Calculer $u_1$.
3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n$.
   **b.** Étudier les variations de la suite $(u_n)$.
   **c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   **b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.




On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ].
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

**1.** Déterminer les coordonnées des points l, J et K dans ce repère.

**2.** Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.

**3.** **a.** Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).

**b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).

**c.** Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).

**4.** Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.
Soit L le centre du carré DCGH.

**a.** Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].

**b.** *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que K est le barycentre des points A. D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soit A le point d'affixe $a = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right)\text{i}$.

**Partie A : étude d'un cas particulier**

On considère la rotation $r$ de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

On note C le point d'affixe $c$ image du point A par la rotation $r$ et D le point d'affixe $d$ image du point B par la rotation $r$.
La figure est donnée en annexe (figure 1).

**1.** **a.** Exprimer $\dfrac{-a}{b-a}$ sous forme algébrique.

**b.** En déduire que OAB est un triangle rectangle isocèle en A.

**2.** Démontrer que $c = -2$. On admet que $d = -2 - 2\text{i}$.

**a.** Montrer que la droite (AC) a pour équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

**b.** Démontrer que le milieu du segment [BD] appartient à la droite (AC).

**Partie B : étude du cas général**

Soit $\theta$ un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 2\pi[$. On considère la rotation de centre O et d'angle $\theta$.
On note A′ le point d'affixe $a'$, image du point A par la rotation $r$, et B′ le point d'affixe $b'$, image du point B par la rotation $r$.
La figure est donnée en annexe (figure 2).
L'objectif est de démontrer que la droite (AA′) coupe le segment [BB′] en son milieu.

**1.** Exprimer $a'$ en fonction de $a$ et $\theta$ et $b'$ en fonction de $b$ et $\theta$.

**2.** Soit P le point d'affixe $p$ milieu de [AA′] et Q le point d'affixe $q$ milieu de [BB′].

**a.** Exprimer $p$ en fonction de $a$ et $\theta$ puis $q$ en fonction de $b$ et $\theta$.

**b.** Démontrer que $\dfrac{-p}{q-p} = \dfrac{-a}{b-a}$.

**c.** En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (PQ).

**d.** Démontrer que le point Q appartient à la droite (AA′).

**EXERCICE 4** **5 points**
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Soit $A$ l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1\ ;\ 46]$.

**1.** On considère l'équation

$$(E) :\quad 23x + 47y = 1$$

où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.

**a.** Donner une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de $(E)$.

**b.** Déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ solutions de $(E)$.

**c.** En déduire qu'il existe un unique entier $x$ appartenant à $A$ tel que

$$23x \equiv 1 \quad (47).$$

**2.** Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs.

**a.** Montrer que si $ab \equiv 0 \quad (47)$ alors $a \equiv 0 \quad (47)$ ou $b \equiv 0 \quad (47)$.

**b.** En déduire que si $a^2 \equiv 1 \quad (47)$ alors $a \equiv 1 \quad (47)$ ou a $a \equiv -1 \quad (47)$.

**3.** **a.** Montrer que pour tout entier $p$ de $A$, il existe un entier relatif $q$ tel que $p \times q \equiv 1 \quad (47)$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier $p$ de $A$, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à $A$ tel que $p \times inv(p) \equiv 1 \quad (47)$.
Par exemple :
$inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1 \quad (47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1 \quad (47)$,
$inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1 \quad (47)$.

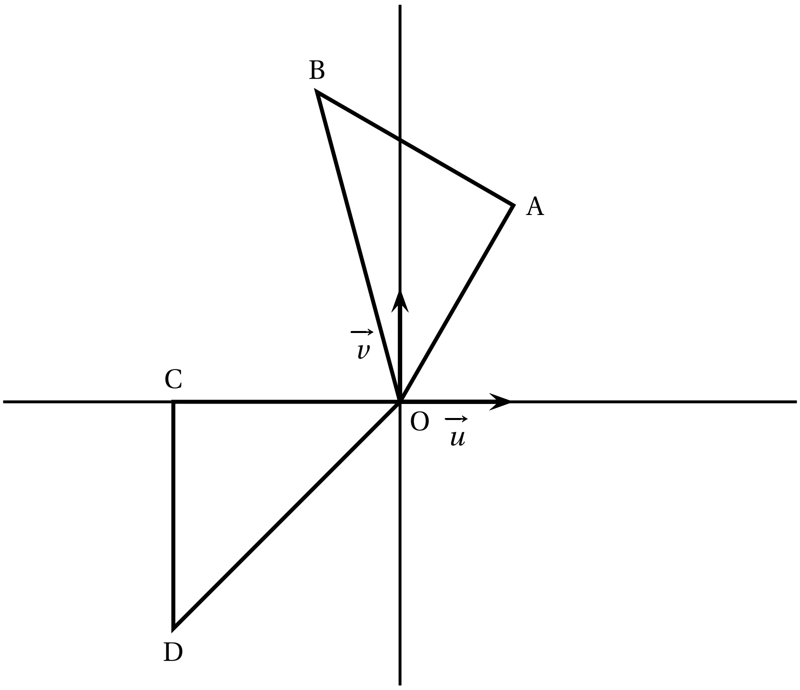
**b.** Quels sont les entiers $p$ de $A$ qui vérifient $p = inv(p)$ ?

**c.** Montrer que $46! \equiv -1 \quad (47)$.

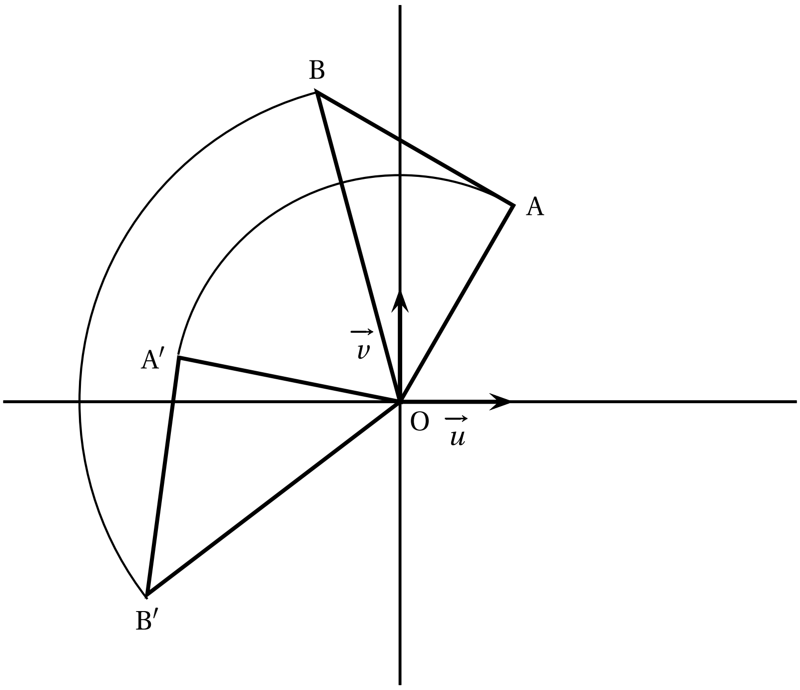
**ANNEXE**

**Cette page ne sera pas à rendre avec la copie**

**Exercice 4**




Partie A : figure 1




Partie B : figure 2

**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Liban 11 juin 2009 ∾

**EXERCICE 1** **3 points**

**Commun à tous les candidats**

*Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.*
*Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.*
*Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.*

**1.** On désigne par $A$ et $B$ deux évènements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité $p$.

On sait que $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $p\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{5}$.

La probabilité de l'évènement $B$ est égale à :

**a.** $\frac{2}{5}$ **b.** $\frac{2}{3}$ **c.** $\frac{3}{5}$ **d.** $\frac{1}{2}$

**2.** On note $X$ une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.

On rappelle que pour tout réel $t$ positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La valeur approchée de $p(X > 5)$ à $10^{-2}$ près par excès est égale à :

**a.** 0,91 **b.** 0,18 **c.** 0,19 **d.** 0,82

**3.** Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$ ; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.

Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

**a.** $\frac{9}{10}$ **b.** $\frac{27}{40}$ **c.** $\frac{3}{4}$ **d.** $\frac{27}{28}$

**EXERCICE 2** **8 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

**Partie A**

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   **b.** Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Tracer (D).
   **c.** Étudier la position relative de (D) et de $(\mathscr{C})$.
   **d.** Montrer que pour tout réel $x$, $f(x) = \ln\left(\text{e}^x + 1\right) - \dfrac{2}{3}x$.
   **e.** En déduire la limite de $f$ en $-\infty$.
2. **a.** On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.
   Montrer que pour tout $x$ réel, $f'(x) = \dfrac{\text{e}^x - 2}{3\left(\text{e}^x + 1\right)}$.
   **b.** En déduire les variations de la fonction $f$.

**Partie B**

Soit $n$ un entier naturel non nul. On appelle $d_n$, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel $n$ non nul, $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \text{e}^{-x}\right)\,\text{d}x$.
2. On admet que pour tout réel $x$, $\ln\left(1 + \text{e}^{-x}\right) \leqslant \text{e}^{-x}$.
   Montrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $\left(d_n\right)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?

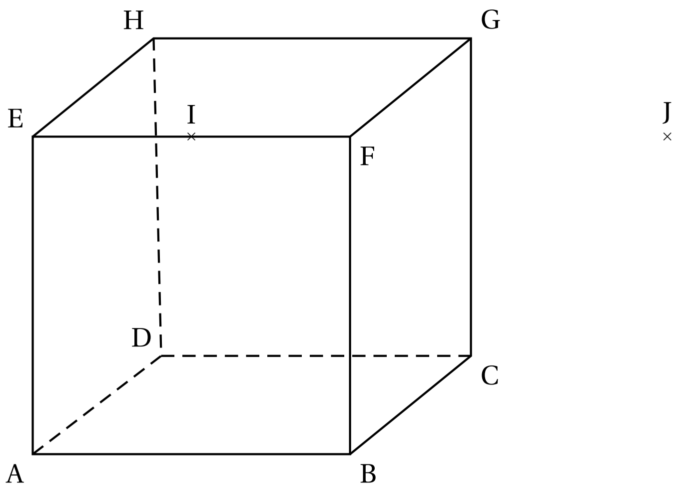
**Partie C**

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $(\mathscr{C})$.
On note (T) la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient $M$ et $N$ deux points de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite $(MN)$ est parallèle à la droite (T).

**EXERCICE 3** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.
Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{\text{AB}},~\overrightarrow{\text{AD}},~\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.




1. **a.** Déterminer les coordonnées des points I et J.
   **b.** Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{\text{DJ}}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   **c.** En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   **d.** Calculer la distance du point F au plan (BGI).
2. On note $(\Delta)$ la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$.
   **b.** Montrer que la droite $(\Delta)$ passe par le centre K de la face ADHE.
   **c.** Montrer que la droite $(\Delta)$ et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{5}{6}\right)$.
   **d.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\frac{3}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}} \text{ et } z_{\text{C}} = -3.$$

**Partie A**

1. Écrire les nombres complexes $z_{\text{A}}$ et $z_{\text{B}}$ sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

**Partie B**

Soit $f$ l'application qui, à tout point $M$ du plan d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = \frac{1}{3}\mathrm{i}z^2.$$

On note O′, A′, B′ et C′ les points respectivement associés par $f$ aux points O, A, B et C.

**1.** **a.** Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A′, B′ et C′.

**b.** Placer les points A′, B′ et C′ .

**c.** Démontrer l'alignement des points O, A et B′ ainsi que celui des points O, B et A′.

**2.** Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G′ le point associé à G par $f$.

**a.** Déterminer les affixes des points G et G′.

**b.** Le point G′ est-il l'isobarycentre des points O′ A′, B′ et C′ ?

**3.** Démontrer que si $M$ appartient à la droite (AB) alors $M'$ appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel $n$ dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10000$.

**Partie A**

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2009^2$ par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 16$.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. **a.** Démontrer que $u_0$ est divisible par 5.

   **b.** Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = u_n \left[{u_n}^4 + 5\left({u_n}^3 + 2{u_n}^2 + 2u_n + 1\right)\right].$$

   **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est divisible par $5^{n+1}$.

2. **a.** Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \mod 625$.

   **b.** Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 625$.

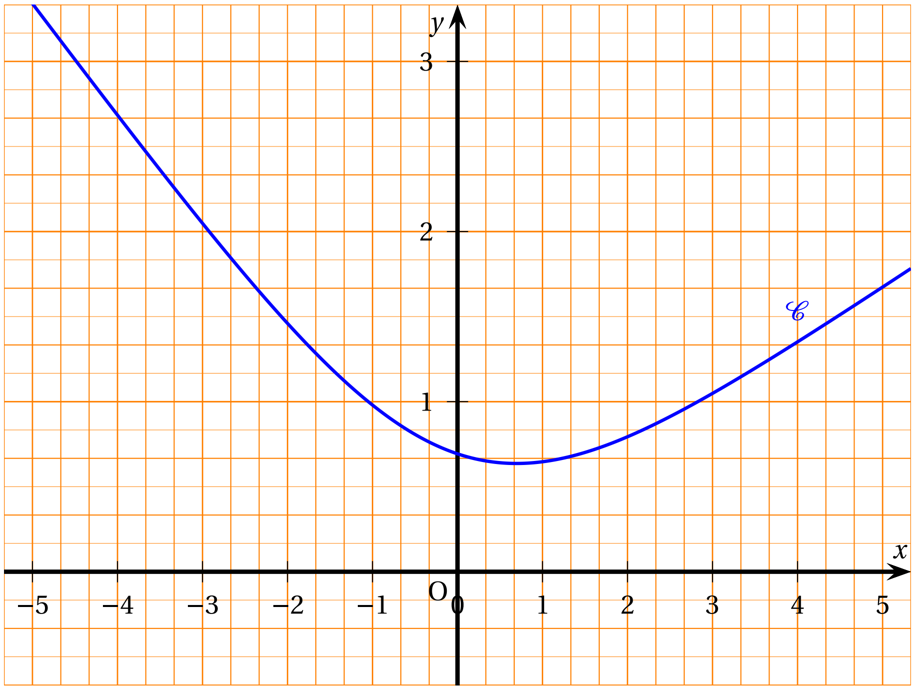
**Partie C**

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10 000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

**ANNEXE**

**Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve**

**Exercice 2**



**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane 23 juin 2009 ∾

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions.

On dispose de deux dés tétraédriques identiques : les quatre faces sont numérotées A, B, C et D.

**1.** On lance les deux dés simultanément et on note la lettre de la face sur laquelle repose chacun des dés.

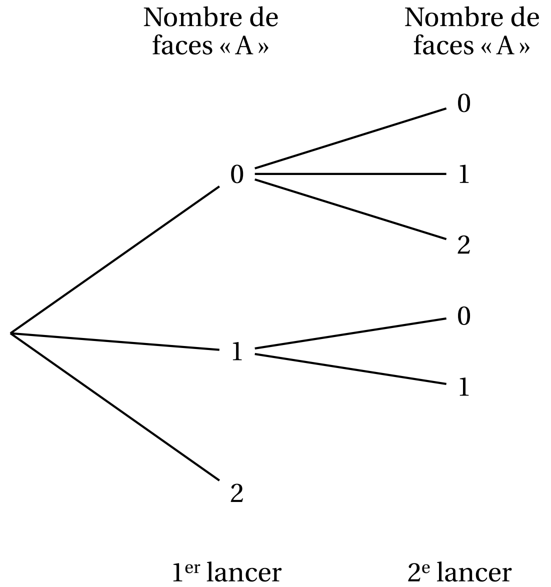
Déterminer la probabilité des évènements suivants :

— $E_0$ : « ne pas obtenir la lettre A »,
— $E_1$ : « obtenir une fois la lettre A »,
— $E_2$ : « obtenir deux fois la lettre A ».

**2.** On organise un jeu de la façon suivante :

— Le joueur lance les deux dés simultanément.
— Si les deux dés reposent sur les faces « A », le jeu s'arrête.
— Si un seul dé repose sur la face « A », le joueur relance l'autre dé et le jeu s'arrête.
— Si aucun dé ne repose sur la face « A », le joueur relance les deux dés et le jeu s'arrête.

**a.** Recopier et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.




**b.** Le joueur gagne si, lorsque le jeu s'arrête, les deux dés reposent sur les faces « A ».

Montrer que, pour le joueur, la probabilité de gagner est de $\dfrac{49}{256}$.

**c.** Pour participer, le joueur doit payer 5 euros. S'il gagne, on lui donne 10 euros. Si, lorsque le jeu s'arrête, un seul dé repose sur la face « A », il est remboursé. Sinon, il perd sa mise.

Le jeu est-il favorable au joueur ?

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

**Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse**.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

   On considère l'application $f$ du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que

   $$z' = (1+\text{i}\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}.$$

   On note $A$ le point d'affixe 2i.

   **Affirmation :** $f$ est la similitude directe, de centre $A$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

2. **Affirmation :** $1991^{2009} \equiv 2\ (7)$.

3. $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs quelconques, $n$ et $p$ sont deux entiers naturels premiers entre eux.

   **Affirmation :** $a \equiv b\ (p)$ si et seulement si $na \equiv nb\ (p)$.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$.

   $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient l'équation : $z = x^2 + y^2$. On note $\mathcal{S}$ la section de $\mathcal{E}$ par le plan d'équation $y = 3$.

   **Affirmation :** $\mathcal{S}$ est un cercle.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$.

   $\mathcal{P}$ est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

   **Affirmation :** O le seul point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec le plan $(y\text{O}z)$ à coordonnées entières.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

**Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse**.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

   Soit le point A d'affixe 3, le point B d'affixe $-4\text{i}$ et l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z$ tels que $|z-3| = |z+4\text{i}|$.

   **Affirmation :** $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment [AB].

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

   On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$, tels que $\dfrac{c-a}{b-a} = 2\text{i}$.

   **Affirmation :** A appartient au cercle de diamètre [BC].

3. On considère le nombre $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$.

   **Affirmation :** $z^{2009}$ est un nombre réel positif.

4. On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.
   On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M vérifiant $\left\|\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\right\| = 6$.

   **Affirmation :** $\mathscr{F}$ est la sphère de centre de G et de rayon 2.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
   $\mathscr{S}$ est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
   $\mathscr{P}$ est le plan d'équation $x + y - 5 = 0$.

   **Affirmation :** Le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ suivant un cercle.

**EXERCICE 3** **7 points**
**Commun à tous les candidats**

**PARTIE A.**

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction $f$ du temps $t$.
$f$ est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10.$$

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps $t$ en heures.

1. Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220 ° C.
2. On pourra admettre désormais que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = 200\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20.$$

   On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ; les unités graphiques sont 2 cm pour un heure en abscisse et 1 cm pour vingt degrés Celsius en ordonnée.

   **a.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^+$.
   **b.** Étudier la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   **c.** Construire $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;\,7]$.

3. **a.** Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est 50° C. On laissera apparents les traits de construction.
   **b.** Retrouver ce résultat par le calcul.

**PARTIE B.**

On considère la suite de terme général $d_n = f(n) - f(n+1)$ où $n \in \mathbb{N}$. $d_n$ représente l'abaissement de température de l'objet entre l'heure $n$ et l'heure $n+1$.

1. **a.** Calculer des valeurs approchées au dixième de $d_0$, $d_1$ et $d_2$.
   **b.** Quelle est la limite de $d_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$?
2. Déterminer la plus petite valeur de l'entier $n$ à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5° C.

**EXERCICE 4** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

On considère la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$ non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

   **a.** En étudiant les variations de la fonction $f$, montrer que, pour tout réel $x$ positif ou nul, $\ln(1 + x) \leqslant x$.
   **b.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.
   **c.** La suite $(u_n)$ peut-elle avoir pour limite $+\infty$?
2. On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$ non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.
   **a.** On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer $v_n$ en fonction de $x$.
   **b.** Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.
   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} v_n$.
   **c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Asie 16 juin 2009 ∾

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathscr{F}_3$.

Une étude statistique a montré que :

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

1. On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

   On considère les évènements $F_1$, $F_2$, $F_3$ et $D$ suivants :
   - $F_1$ : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ » ;
   - $F_2$ : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_2$ » ;
   - $F_3$ : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$ » ;
   - $D$ : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

   **a.** Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les évènements précédents.
   *Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.*

   **b.** Calculer la probabilité qu'une paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_1$ et présente un défaut.

   **c.** Calculer la probabilité de l'évènement $F_2 \cap D$.

   **d.** En déduire la probabilité de l'évènement $F_3 \cap D$.

   **e.** Sachant que la paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathscr{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2. L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
   On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.

   **a.** Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.

   **b.** Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

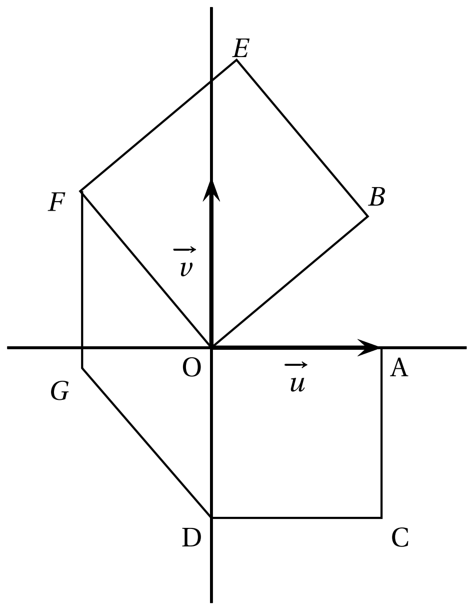
**EXERCICE 2** **5 points**

**Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

On place dans ce repère, les points A d'affixe 1, $B$ d'affixe $b$ où $b$ est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive.
On construit à l'extérieur du triangle O A$B$, les carrés directs O$DC$A et O$BEF$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.

1. Déterminer les affixes $c$ et $d$ des points C et D.
2. On note $r$ la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
   **a.** Déterminer l'écriture complexe de $r$.
   **b.** En déduire que l'affixe $f$ du point $F$ est i$b$.
   **c.** Déterminer l'affixe $e$ du point $E$.
3. On appelle $G$ le point tel que le quadrilatère O$FG$D soit un parallélogramme.
   Démontrer que l'affixe $g$ du point $G$ est égale à $\text{i}(b-1)$.
4. Démontrer que $\dfrac{e-g}{c-g} = \text{i}$ et en déduire que le triangle $EG$C est rectangle et isocèle.




**EXERCICE 2** **5 points**
**Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs $N$ tels que

$$\left\{\begin{array}{lll} N & \equiv & 5 \quad (13)\\ N & \equiv & 1 \quad (17)\end{array}\right.$$

   **a.** Vérifier que 239 est solution de ce système.
   **b.** Soit $N$ un entier relatif solution de ce système.
   Démontrer que $N$ peut s'écrire sous la forme $N = 1+17x = 5+13y$ où $x$ et $y$ sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
   **c.** Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
   **d.** En déduire qu'il existe un entier relatif $k$ tel que $N = 18 + 221k$.
   **e.** Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \quad (221)$ et $\left\{\begin{array}{lll} N & \equiv & 5 \quad (13)\\ N & \equiv & 1 \quad (17)\end{array}\right.$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   **a.** Existe-t-il un entier naturel $k$ tel que $10^k \equiv 1 \quad (17)$ ?
   **b.** Existe-t-il un entier naturel $l$ tel que $10^l \equiv 18 \quad (221)$ ?

**EXERCICE 3** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée $\alpha$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

**Partie A : existence et unicité de la solution**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée $\alpha$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. Vérifier que : $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

**Partie B : encadrement de la solution $\alpha$**

On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction $g$.
   - **a.** Étudier le sens de variation de la fonction $g$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - **b.** En déduire que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
   - **c.** Démontrer qu'un nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
2. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n$, par $u_{n+1} = g(u_n)$.
   - **a.** En utilisant le sens de variation de la fonction $g$, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   - **b.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha$.
3. Recherche d'une valeur approchée de $\alpha$
   - **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de $u_{10}$, arrondie à la sixième décimale.
   - **b.** On admet que $u_{10}$ est une valeur approchée par défaut à $5 \times 10^{-4}$ près de $\alpha$. En déduire un encadrement de $\alpha$ sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$ où $u$ et $v$ sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

**EXERCICE 4** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

*L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.*
*Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

1. Question 1

   La solution $f$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

| Réponse (1) : | Réponse (2) : | Réponse (3) : |
|---|---|---|
| $f(x) = -2\text{e}^{-2x} + 3$ | $f(x) = -2\text{e}^{2x} + 3$ | $f(x) = -2\text{e}^{-2x} - 3$ |

2. Question 2

   On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\overrightarrow{\text{IB}} + \overrightarrow{\text{IC}} = \overrightarrow{0}$.

   Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

| Réponse (1) : | Réponse (2) : | Réponse (3) : |
|---|---|---|
| $\{(\text{A}, 1), (\text{C}, 2)\}$ | $\{(\text{A}, 1), (\text{B}, 2), (\text{C}, 2)\}$ | $\{(\text{A}, 1), (\text{B}, 2), (\text{C}, 1)\}$ |

3. Question 3

   Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $x - 3y + 2z = 5$ et le point $\text{A}(2~;~3~;~-1)$.

   Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point :

| Réponse (1) : | Réponse (2) : | Réponse (3) : |
|---|---|---|
| $\text{H}_1(3~;~-1~;~4)$ | $\text{H}_2(4~;~-3~;~-4)$ | $\text{H}_3(3~;~0~;~1)$ |

4. Question 4

   La valeur moyenne de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ est égale à :

| Réponse (1) : | Réponse (2) : | Réponse (3) : |
|---|---|---|
| $-\dfrac{\pi}{2}$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |

**Durée : 4 heures**

# ∾ Baccalauréat S Centres étrangers 15 juin 2009 ∾

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   **Prérequis :** On rappelle que deux évènements $A$ et $B$ sont indépendants pour la probabilité $p$ si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

   Soient $A$ et $B$ deux évènements associés à une expérience aléatoire.

   **a.** Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

   **b.** Démontrer que, si les évènements $A$ et $B$ sont indépendants pour la probabilité $p$, alors les évènements $\overline{A}$ et $B$ le sont également.

2. **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :
   - $R$ : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
   - $S$ : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

   Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de $R$ est égale 0,1 et que celle de $S$ est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

   **a.** Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

   **b.** Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

   **c.** Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
   Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1. Faire une figure où l'on placera les points A, B, C, I dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles.
   Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Soit H le point de coordonnées $\left(\dfrac{15}{19} ; \dfrac{45}{19} ; \dfrac{45}{19}\right)$.

**a.** Démontrer que les points H, C, I sont alignés.

**b.** Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

**c.** En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

**4.** Calculs d'aire et de volume.

**a.** Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.

**b.** Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

**c.** Calculer l'aire du triangle ABC.

## EXERCICE 2 — 5 points

**Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**1.** On note (E) l'équation $3x + 2y = 29$ où $x$ et $y$ sont deux nombres entiers relatifs.

**a.** Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).

**b.** Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

**c.** Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$;

**2.** Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y = 29$.

**a.** Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (O$z$) de vecteur directeur $\vec{k}$.

**b.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (O$x$) et (O$y$) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

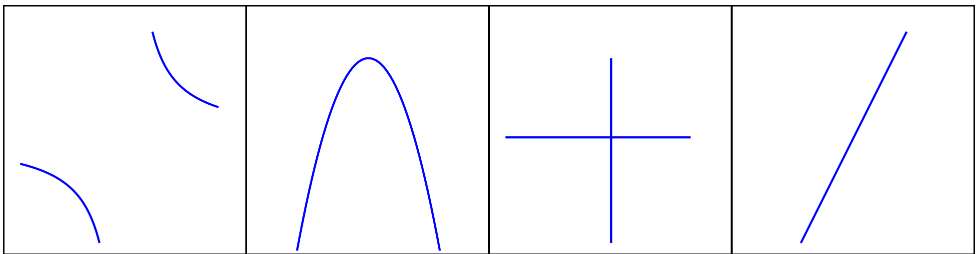
**c.** Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.

**d.** Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et ($x$O$y$), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

**3.** Étude d'une surface

$\mathcal{S}$ est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Les figures suivantes représentent les intersections de $\mathcal{S}$ avec certains plans de l'espace.



| figure n° 1 | figure n° 2 | figure n° 3 | figure n° 4 |
|---|---|---|---|

**a.** $S_1$ désigne la section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan ($x$O$y$).
Une des figures données représente $S_1$ laquelle?

**b.** $S_2$ désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{R}$ d'équation $z = 1$.
Une des figures données représente $S_2$, laquelle?

**c.** $S_3$ désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = 8$.
Une des figures données représente $S_3$, laquelle?

**d.** $S_4$ désigne la section de $\mathscr{S}$ par le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y = 29$ de la question 2.

Déterminer les coordonnées des points communs à $S_4$ et $\mathscr{P}$ dont l'abscisse $x$ et l'ordonnée $y$ sont des entiers naturels vérifiant l'équation

$3x + 2y = 29$.

## EXERCICE 3 — 4 points

**Commun à tous les candidats**

*Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.*

1. Pour tout complexe $z$, $\text{Re}\left(z^2\right) = \left(\text{Re}(z)\right)^2$.
2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

   Pour tout nombre complexe $z$ non nul, les points $M$ d'affixe $z$, $N$ d'affixe $\overline{z}$ et $P$ d'affixe $\dfrac{z^2}{\overline{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O.
3. Pour tout nombre complexe $z$, si $|1 + \text{i}z| = |1 - \text{i}z|$, alors la partie imaginaire de $z$ est nulle.
4. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

   Quels que soient les nombres complexes $z$ et $z'$ non nuls, d'images respectives $M$ et $M'$ dans le plan complexe, si $z$ et $z'$ vérifient l'égalité $|z + z'| = |z - z'|$, alors les droites (O$M$) et (O$M'$) sont perpendiculaires.

## EXERCICE 4 — 6 points

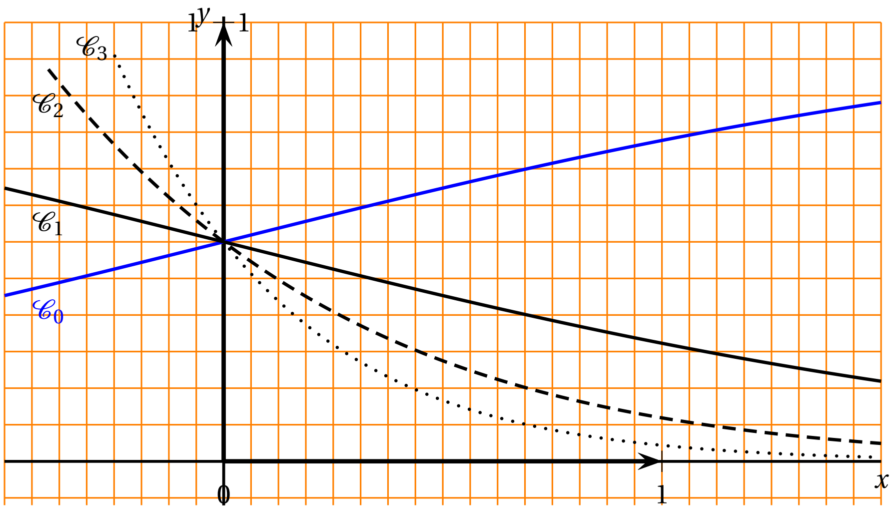
**Commun à tous les candidats**

Soit $n$ un entier naturel.

On note $f_n$, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\text{e}^{-nx}}{1 + \text{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :




**Partie A :** *Quelques propriétés des fonctions $f_n$ et des courbes $\mathscr{C}_n$*

**1.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$ les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.

**2.** Étude de la fonction $f_0$

**a.** Étudier le sens de variation de $f_0$.

**b.** Préciser les limites de la fonction $f_0$ en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

**c.** Dresser le tableau de variation de la fonction $f_0$ sur $\mathbb{R}$.

**3.** Étude de la fonction $f_1$

**a.** Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel $x$.

**b.** En déduire les limites de la fonction $f_1$ en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.

**c.** Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

**4.** Étude de la fonction $f_n$ pour $n \geqslant 2$

**a.** Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel $x$, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$

**b.** Étudier les limites de la fonction $f_n$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**c.** Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction $f_n$ sur $\mathbb{R}$.

**Partie B :** *Étude d'une suite liée aux fonctions $f_n$*

On pose, pour tout entier naturel $n$ : $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$

**1.** Calculer $u_1$ puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire $u_0$.

**2.** Démontrer que, pour tout entier $n$ : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

**3.** Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.

**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S La Réunion 23 juin 2009 ∾

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).*
*Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.

**1.** Soit (E) l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant : $z = 1 - 2\text{i} + \text{e}^{\text{i}\theta}$, $\theta$ étant un nombre réel.

- **a.** (E) est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2\text{i}$.
- **b.** (E) est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2\text{i}$ et de rayon 1.
- **c.** (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2\text{i}$ et de rayon 1.
- **d.** (E) est le cercle de centre d'affixe $1 - 2\text{i}$ et de rayon $\sqrt{5}$.

**2.** Soit $f$ l'application du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que $z' = -\text{i}z - 2\text{i}$.

- **a.** $f$ est une homothétie.
- **b.** Le point d'affixe $-1 - 2\text{i}$ est un antécédent du point d'affixe i.
- **c.** $f$ est la rotation de centre le point d'affixe $1 + \text{i}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
- **d.** $f$ est la rotation de centre le point d'affixe $-1 - \text{i}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

**3.** Soit (F) l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant $|z - 1 + \text{i}| = |z + 1 + 2\text{i}|$.
Soient les points A, B et C d' affixes respectives $1 - \text{i}$, $-1 + 2\text{i}$ et $-1 - 2\text{i}$.

- **a.** C est un point de (F).
- **b.** (F) est la médiatrice du segment [AB].
- **c.** (F) est la médiatrice du segment [AC].
- **d.** (F) est le cercle de diamètre [AB].

**4.** On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z + |z|^2 = 7 + \text{i}$.
Cette équation admet :

- **a.** Deux solutions distinctes qui ont pour partie imaginaire 1.
- **b.** Une solution réelle.
- **c.** Deux solutions dont une seule a pour partie imaginaire 1.
- **d.** Une solution qui a pour partie imaginaire 2.

**EXERCICE 2** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions $f$ et $g$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

**Partie A**

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ dans un repère $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction $f$ et sa limite en $+\infty$?
2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction $g$.
4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ ?
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

**Partie B**

L'objectif de cette partie est de calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. Hachurer sur l'annexe cette partie du plan.
2. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $\mathrm{I} = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit $H$ la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par
   $$H(x) = -\left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
   **a.** Calculer la dérivée $H'$ de la fonction $H$.
   **b.** En déduire une primitive sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de la fonction $g$.
4. Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

## EXERCICE 3 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut $a$ et le défaut $b$. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.
   On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.
   On note $A$ l' évènement « le sac présente le défaut $a$ » et $B$ l'évènement « le sac présente le défaut $b$ ». Les probabilités des évènements $A$ et $B$ sont respectivement $P(A) = 0{,}02$ et $P(B) = 0{,}01$ ; on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

**a.** Calculer la probabilité de l'évènement $C$ « le sac prélevé présente le défaut $a$ et le défaut $b$ ».

**b.** Calculer la probabilité de l'évènement $D$ « le sac est défectueux ».

**c.** Calculer la probabilité de l'évènement $E$ « le sac ne présente aucun défaut ».

**d.** Sachant que le sac présente le défaut $a$, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut $b$ ?

**2.** On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire $X$ qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

**a.** Justifier que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

**b.** Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

**c.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soient A(1 ; 2 ; 0), B(2 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 0) et D(1 ; 2 ; 1) quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;
(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;
(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

**1.** Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x - y + 1 = 0$.

On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y+z+2 = 0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.

**2.** **a.** Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+1 &=& 0\\ -y+z+2 &=& 0\\ -x+z+1 &=& 0\end{array}\right.$

**b.** En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point E(2 ; 3 ; 1).

**c.** Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD).

En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).

**3.** Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

*On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères* $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{k}\right)$ *et* $\left(O ; \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

**4.** *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

**a.** Montrer que tout point $M$ de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

**b.** Existe-t-il des points de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) ?

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

**1.** Soient F le point de coordonnées $\left(0~;~0~;~\dfrac{1}{4}\right)$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $z = -\dfrac{1}{4}$.

On note $d(M,~\mathscr{P})$ la distance d'un point $M$ au plan $\mathscr{P}$.

Montrer que l'ensemble $(S)$ des points $M$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ qui vérifient $d(M,~\mathscr{P}) = M\text{F}$ a pour équation $x^2 + y^2 = z$.

**2.** **a.** Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble $(S)$ avec le plan d'équation $z = 2$ ?

**b.** Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble $(S)$ avec le plan d'équation $x = 0$ ?

Représenter cette intersection dans le repère $\left(\text{O}~;~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

**3.** Dans cette question, $x$ et $y$ désignent des nombres entiers naturels.

**a.** Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de $x^2$ par 7 ?

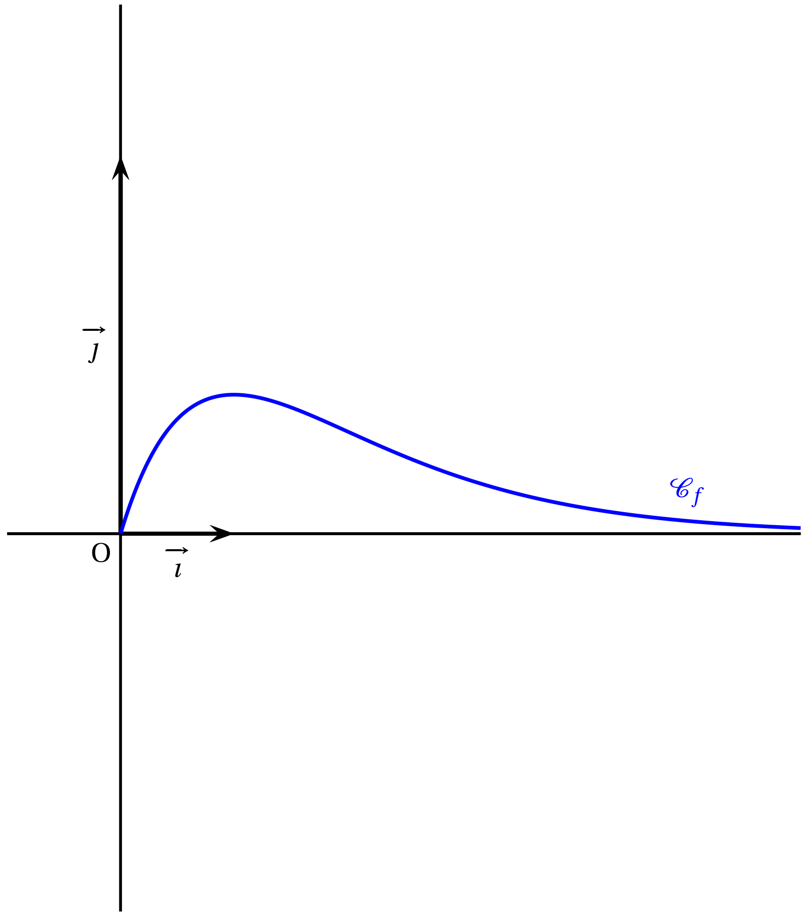
**b.** Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise $x$ et 7 divise $y$.

**4.** *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble $(S)$ et du plan d'équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

**ANNEXE Exercice 2**

**À rendre avec la copie**



**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel $n$, $v_n = u_n - 6$.

**a.** Pour tout nombre entier naturel $n$, calculer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$. Quelle est la nature de la suite $(v_n)$ ?

**b.** Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n, u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

**c.** Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

2. On considère la suite $(w_n)$ dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$ :

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

| $w_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ | $w_7$ | $w_8$ | $w_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |

**a.** Détailler le calcul permettant d'obtenir $w_{10}$.

**b.** *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite $(w_n)$. Calculer $w_{2009}$.

**EXERCICE 2** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

**PARTIE I**

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Justifier que pour tout nombre réel positif $x$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

3. Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

**PARTIE II**

Soit $\lambda$ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$. On se propose de majorer $\mathscr{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1. **Première méthode**
   - **a.** Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathscr{A}(\lambda)$.
   - **b.** Justifier que pour tout nombre réel $\lambda$ strictement positif, $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.
2. **Deuxième méthode**
   - **a.** Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\lambda$.
   - **b.** On admet que pour tout nombre réel positif $u$, $\ln(1+u) \leqslant u$.
     Démontrer alors que, pour tout nombre réel $\lambda$ strictement positif,
     $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant -\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda} + 1$.
3. **Application numérique**
   Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathscr{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$ ?

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

**I.** *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

*On rappelle que si $n$ et $p$ sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors* $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n$ et pour tout nombre entier naturel $p$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$.

**II.** Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. **a.** On note $A$ l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement $A$ est égale à $\dfrac{7}{15}$.
   - **b.** On note $B$ l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
     Calculer la probabilité de $B$.
   - **c.** Les évènements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?
2. Soit $X$ la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de $X$.
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, on associe à tout point $M$ d'affixe $z$ non nulle, le point $M'$ milieu du segment $[MM_1]$ où $M_1$ est le point d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

Le point $M'$ est appelé l'image du point $M$.

1. **a.** Montrer que les distances O$M$ et O$M_1$ vérifient la relation $\text{O}M \times \text{O}M_1 = 1$ et que les angles $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{\text{O}M_1}\right)$ et $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{\text{O}M}\right)$ vérifient l'égalité des mesures suivantes
   $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{\text{O}M_1}\right) = -\left(\vec{u} ; \overrightarrow{\text{O}M}\right)$ à $2\pi$ près.

   **b.** Sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie) le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

   Construire le point A′ image du point A. (On laissera apparents les traits de construction).
2. **a.** Justifier que pour tout nombre complexe $z$ non nul, le point $M'$ a pour affixe $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

   **b.** Soient B et C les points d'affixes respectives 2i et −2i. Calculer les affixes des points B′ et C′ images respectives des points B et C.

   **c.** Placer les points B, C, B′ et C′ sur la figure donnée en annexe 2 (à rendre avec la copie).
3. Déterminer l'ensemble des points $M$ tels que $M' = M$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Montrer que si le point $M$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1 alors son image $M'$ appartient au segment [KL] où K et L sont les points d'affixes respectives −1 et 1.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des couples $(x, y)$ de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$.

   **b.** Soit $m$ un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple $(p, q)$ de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

   Montrer que le couple $(p, q)$ est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$.

   **c.** Déterminer le plus petit de ces nombres entiers $m$ supérieurs à 2 000.
2. Soit $n$ un nombre entier naturel.

   **a.** Démontrer que pour tout nombre entier naturel $k$ on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.

   **b.** Quel est le reste dans la division euclidienne de $2^{2009}$ par 7 ?

**3.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels $N$ ceux qui sont divisibles par 7.

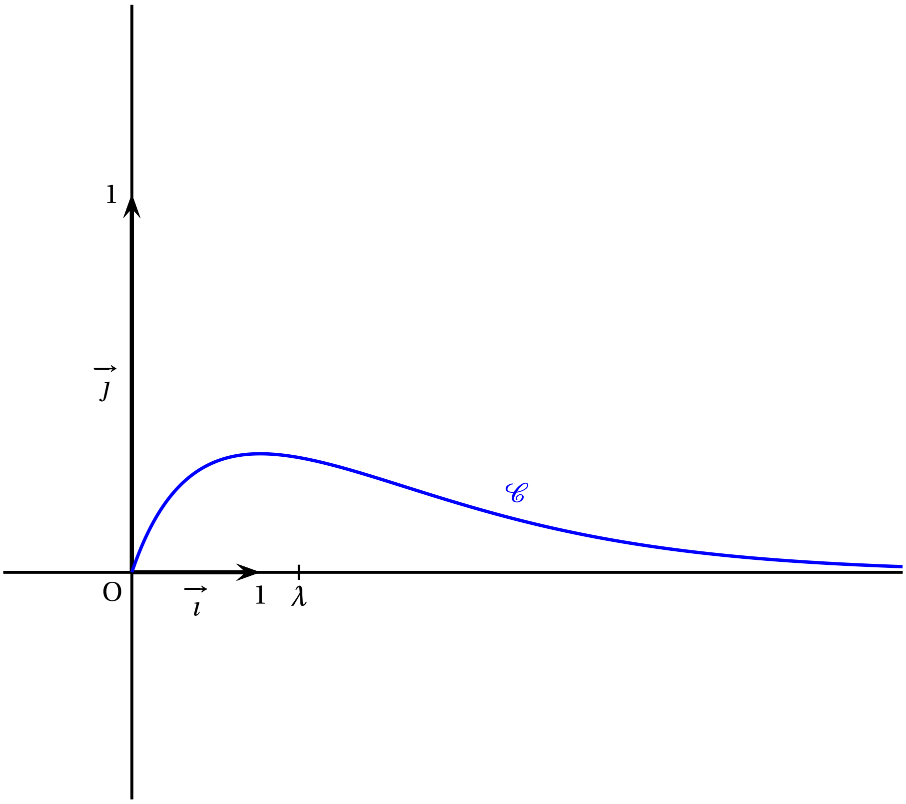
**a.** Vérifier que $10^3 \equiv -1(\text{modulo } 7)$.

**b.** En déduire tous les nombres entiers $N$ cherchés.

**ANNEXE 1**

**Exercice 2**

(À rendre avec la copie)

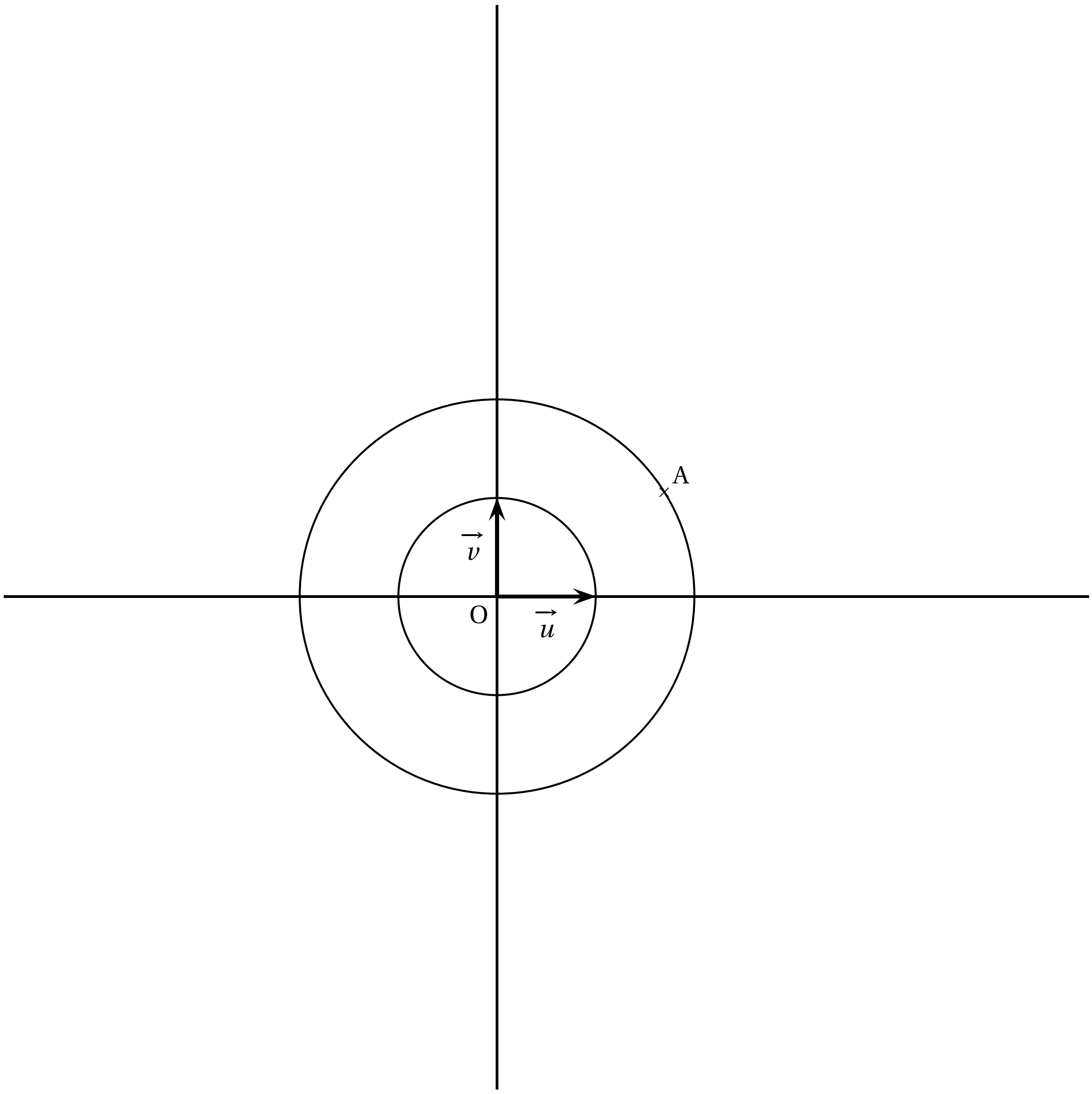


**ANNEXE 2**

**Exercice 4**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

(À rendre avec la copie)



**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).*

*Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la répons exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(1 ; 2 ; −1), B(1 ; 1 ; 0), C(9 ; −1 ; −2), S(1; 1; 1).

On admet qu'une équation du plan (ABC) est $x+2y+2z-3=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

**a.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t \\ y &=& 2-4t \\ z &=& -1+3t \end{array}\right.$ ($t$ réel)

**b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& -1-t \\ z &=& 3+t \end{array}\right.$ ($t$ réel)

**c.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& 1-2t \\ z &=& 2t \end{array}\right.$ ($t$ réel)

2. Les coordonnées du point S′ symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont :

**a.** $\left(\dfrac{10}{9} ; \dfrac{11}{9} ; \dfrac{10}{9}\right)$ **b.** $\left(\dfrac{5}{9} ; \dfrac{1}{9} ; \dfrac{1}{9}\right)$ **c.** $\left(\dfrac{7}{9} ; \dfrac{5}{9} ; \dfrac{5}{9}\right)$

3. Le triangle ABC est :

**a.** isocèle **b.** en A **c.** rectangle en B

4. L'ensemble des points $M$ de l'espace vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=9$ est :

**a.** un plan passant par S **b.** une sphère passant par S **c.** une sphère de centre S

**EXERCICE 2** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On désigne par A, B et J les points d'affixes respectives −i, 1 − i et i.

On désigne par Δ la médiatrice du segment [AB] et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

À tout point $M$ d'affixe $z$ distincte de 1 − i, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que

$$z'=\frac{\text{i}(z+\text{i})}{z-1+\text{i}}.$$

Le point $M'$ est appelé image du point $M$.

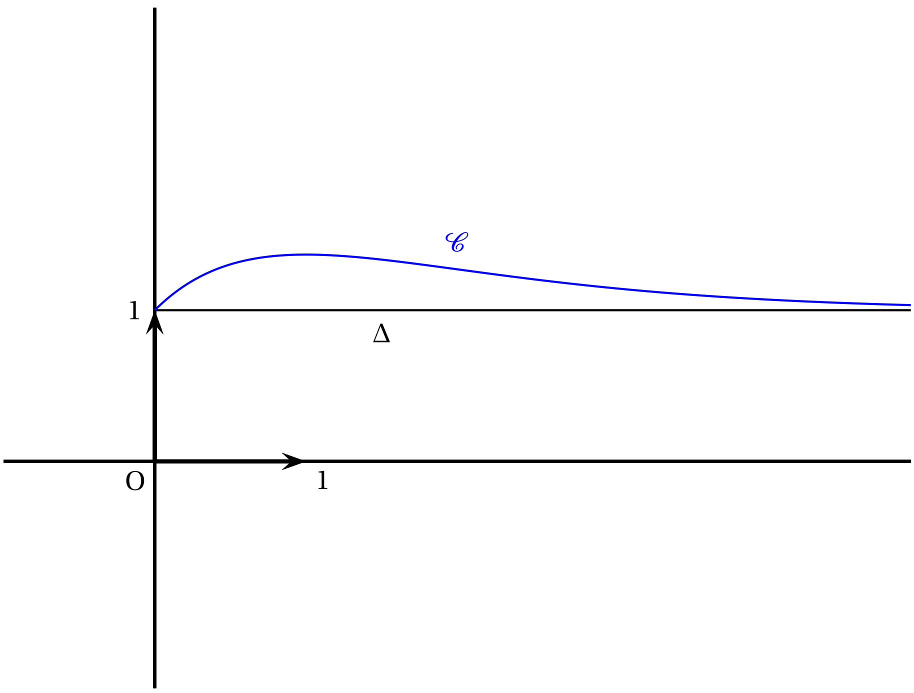
1. Calculer les affixes des points A′ et O′.
2. Sur la feuille de papier millimétré, faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice (unité graphique 4 cm).
3. Montrer que l'équation $z = \dfrac{\mathrm{i}(z+\mathrm{i})}{z-1+\mathrm{i}}$ admet deux solutions que l'on précisera.
   On note E et F les points qui ont pour affixes respectives ces solutions.
   Justifier que les points E et F appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ et les placer sur la figure.
4. Soit $M$ un point distinct du point B et $M'$ son image.
   **a.** Exprimer la distance O$M'$ en fonction des distances A$M$ et B$M$.
   **b.** Montrer que si le point $M$ décrit la droite $\Delta$, alors le point $M'$ décrit un cercle que l'on précisera.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que si le point $M$ décrit la droite (AB) privée du point B, alors le point $M'$ appartient à une droite que l'on précisera.

**EXERCICE 3** **6 points**
**Commun à tous les candidats**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\mathrm{e}^{-x}.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = 1$ sont tracées ci-dessous.




**Partie A**

1. Justifier les propriétés suivantes constatées sur la représentation graphique.

**a.** La droite $\Delta$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

**b.** La fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

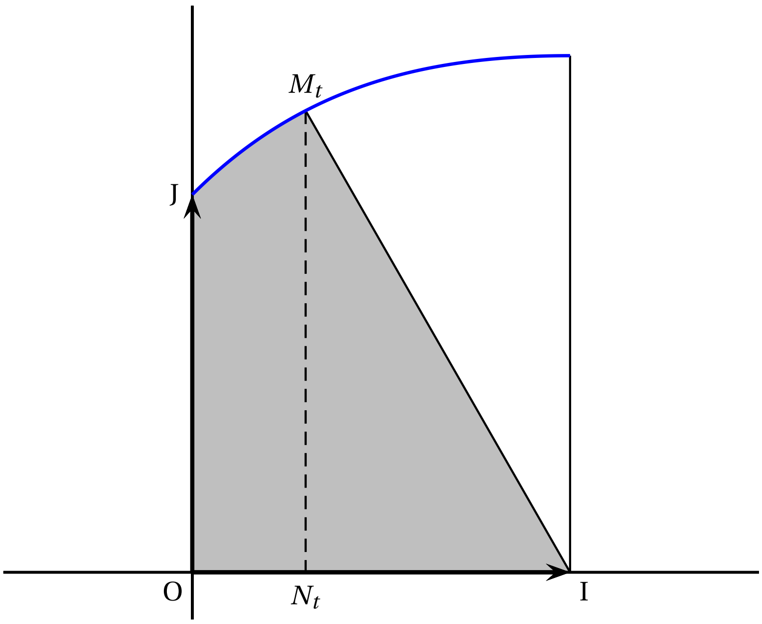
**2.** Soit $t$ un nombre réel positif. On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

**a.** Interpréter graphiquement cette intégrale.

**b.** Montrer que $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = t - t\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-t} + 1$.

**Partie B**

On note I le point de coordonnées $(1\,;0)$ et J le point de coordonnées $(0\,;1)$.
Pour tout nombre réel $t$ de l'intervalle $[0\,;1]$, $M_t$ désigne le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse $t$ et $N_t$ le point de coordonnées $(t~;~0)$.
On appelle $\mathscr{D}_t$, le domaine du plan délimité par la droite $(\mathrm{I}M_t)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$. Ce domaine est représenté par la zone grisée du graphique ci-joint. Soit $\mathscr{A}(t)$ la mesure de son aire exprimée en unité d'aire.




**1.** Interpréter graphiquement $\mathscr{A}(0)$ et donner sa valeur exacte.

**2.** Interpréter graphiquement $\mathscr{A}(1)$ et donner sa valeur exacte.

**3.** Calculer l'aire du triangle $M_tN_t\mathrm{I}$.

**4.** En déduire que pour tout nombre réel $t$ appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$,

$$\mathscr{A}(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{-t}.$$

**5.** *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il un unique nombre réel $\alpha$ de l'intervalle $[0\,;1]$ tel que $\mathscr{A}(\alpha) = \dfrac{1}{2} \times \mathscr{A}(1)$ ?
Justifier la réponse.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**1.** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel $n$,

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

**a.** Calculer $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

**b.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

**c.** Sur l'annexe à rendre avec la copie, sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 3$.

À partir de $u_0$, en utilisant ces deux droites, on a placé $u_1$ sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

**2.** Soit $(v_n)$ la suite définie, pour tout nombre entier naturel $n$, par $v_n = u_n - 6$.

**a.** Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

**b.** Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

**c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

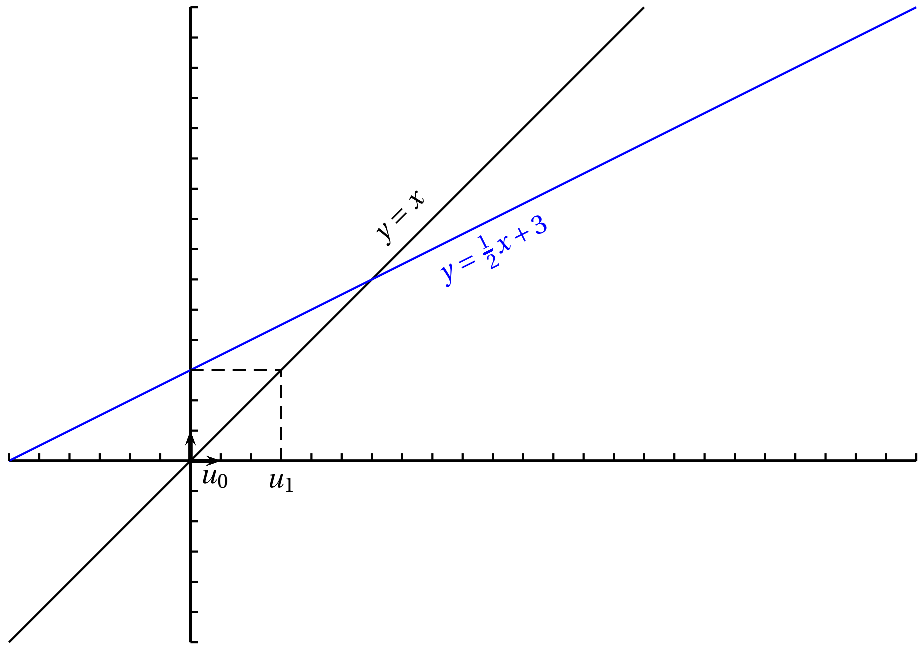
**3.** Soit $(w_n)$ la suite de premier terme $w_0$ et telle que, pour tout nombre entier naturel $n$, $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$.

On suppose que $w_0$ est strictement supérieur à 6.

Les suites $(u_n)$ et $(w_n)$ sont-elles adjacentes ? Justifier.

**ANNEXE Exercice 4 (à rendre avec la copie)**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**



**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2009 ∾

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- $D$ l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- $R$ l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

**1.** Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

**2. a.** Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

**b.** On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

**3.** Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.

**4.** Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

On désigne par $G$ la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

**a.** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $G$.

**b.** Calculer à $10^{-2}$ près l'espérance mathématique de $G$. Donner une interprétation de ce résultat.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
On supposera connus les résultats suivants :

- Pour tous points A, B et C du plan d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$, avec A $\neq$ C et A $\neq$ B :
$\left|\dfrac{b-a}{c-a}\right| = \dfrac{\text{AB}}{\text{AC}}$ et $\arg\left(\dfrac{b-a}{c-a}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{AB}}\right) + k \times 2\pi$ où $k$ est un entier relatif ;

- Soit $z$ un nombre complexe et soit $\theta$ un nombre réel :
  $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + k \times 2\pi$ où $k$ est un entier relatif.

Démontrer que la rotation $r$ d'angle $\alpha$ et de centre $\Omega$ d' affixe $\omega$ est la transformation du plan qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que : $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$.

**Partie B**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 1 cm.
Soit $f$ l'application qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = \mathrm{i}z + 4 + 4\mathrm{i}.$$

1. **a.** Déterminer l'affixe $\omega$ du point $\Omega$ tel que $f(\Omega) = \Omega$
   **b.** Montrer que, pour tout nombre complexe $z$ on a : $z' - 4\mathrm{i} = \mathrm{i}(z - 4\mathrm{i})$.
   **c.** En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $f$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives $a = 4 - 2\mathrm{i}$ et $b = -4 + 6\mathrm{i}$.
   **a.** Placer les points A, B et $\Omega$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.
   **b.** Déterminer les affixes des points A$'$ et B$'$ images respectives des points A et B par $f$.
3. On appelle $m$, $n$, $p$ et $q$ les affixes des points M N, P et Q, milieux respectifs des segments [AA$'$], [A$'$B], [BB$'$] et [B$'$A].
   **a.** Déterminer $m$. On admettra que $n = 1 + 7\mathrm{i}$, $p = -3 + 3\mathrm{i}$ et $q = 1 - \mathrm{i}$.
   **b.** Démontrer que MNPQ est un parallélogramme.
   **c.** Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{q - m}{n - m}$.
   En déduire la nature du quadrilatère MNPQ.
4. Démontrer que les droites (B$'$A) et ($\Omega$N) sont perpendiculaires.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie A : Restitution organisée de connaissances**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.
On supposera connu le résultat suivant :
Une application $f$ du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si $f$ admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$.
Démontrer que si A, B, A$'$ et B$'$ sont quatre points teIs que A est distinct de B et A$'$ est distinct de B$'$, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A$'$ et B en B$'$.

**Partie B**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 2 cm.
On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 2,\ z_{\mathrm{C}} = 4 + 6\mathrm{i},\ z_{\mathrm{D}} = -1 + \mathrm{i}\ \text{ et }\ z_{\mathrm{E}} = -3 + 3\mathrm{i}.$$

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. Soit $f$ la similitude plane directe telle que $f(\text{A}) = \text{D}$ et $f(\text{B}) = \text{A}$.
   **a.** Donner l'écriture complexe de $f$.
   **b.** Déterminer l'angle, le rapport et le centre $\Omega$ de cette similitude.
   **c.** Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude $f$.
   **d.** En déduire la nature du triangle DAE.
4. On désigne par $(\Gamma_1)$ le cercle de diamètre [AB] et par $(\Gamma_2)$ le cercle de diamètre [AD].
   On note $M$ le second point d'intersection du cercle $(\Gamma_1)$ et de la droite (BC), et $N$ le second point d'intersection du cercle $(\Gamma_2)$ et de la droite (AE).
   **a.** Déterminer l'image de $M$ par la similitude $f$.
   **b.** En déduire la nature du triangle $\Omega MN$.
   **c.** Montrer que $M\text{B} \times N\text{E} = M\text{C} \times N\text{A}$.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats.**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points : A(1 ; −1 ; 3), B(0 ; 3 ; 1), C(6 ; −7 ; −1), D(2 ; 1 ; 3) et E(4 ; −6 ; 2).

1. **a.** Montrer que le barycentre du système {(A, 2), (B, −1), ($C$, 1)} est le point E.
   **b.** En déduire l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ de l'espace tels que
$$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 2\sqrt{21}.$$
2. **a.** Montrer que les points A, B et D définissent un plan.
   **b.** Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).
   **c.** Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).
3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
   **b.** Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*
   Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble $\Gamma$, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

**EXERCICE 4** **6 points**
**Commun à tous les candidats.**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

**Partie A**

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée en annexe, est la courbe représentative d'une fonction $f$ dérivable sur $[0\,;\ +\infty[$, de fonction dérivée $f'$ continue sur $[0\,;\ +\infty[$.
La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O et $\text{A}\left(1\,;\ \dfrac{1}{2\text{e}}\right)$ et, sur [0; 1], elle est au dessus du segment [OA].

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$.

**Partie B**

On sait désormais que la fonction $f$ considérée dans la partie A est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction $g$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
   Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** Montrer que pour tout $x$ de $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
   **b.** En déduire les variations de $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

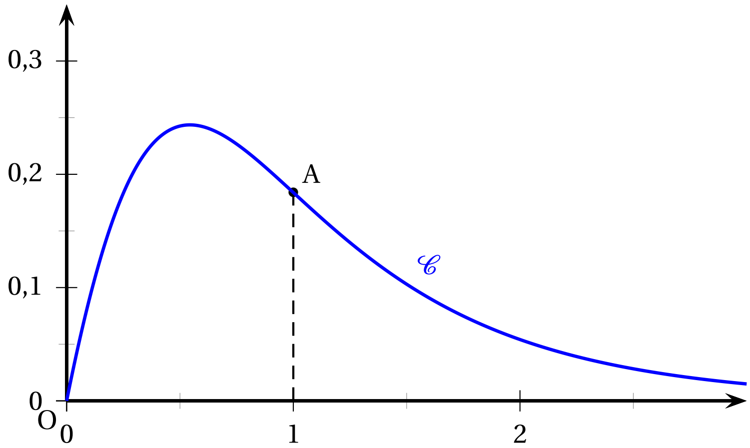
$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   **a.** Montrer que pour tout $x$ de $[0\ ;\ +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   **b.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.
   **c.** En déduire la limite de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**ANNEXE**

**Exercice 4**

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

# Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2009



**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

**VRAI OU FAUX**

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

**PARTIE A**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite $(u_n)$ est bornée.
2. La suite $(u_n)$ converge.
3. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
4. Toute suite $(v_n)$ à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

**PARTIE B**

1. Si $A$ et $B$ sont deux évènements indépendants avec $P(B) \neq 0$ et $P(B) \neq 1$, alors $P(A \cap B) = P_B(A)$.
2. Si $X$ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$, alors $P\left(X \in [0{,}1\,;\,0{,}6]\right) = 0{,}6$.
3. Si $X$ est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{1}{3}$, alors $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère les points A$(1\,;\,-1\,;\,4)$, B$(7\,;\,-1\,;\,-2)$ et C$(1\,;\,5\,;\,-2)$.

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$.

   **b.** Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

   **c.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   **d.** En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & -2t\\ y & = & -2t-2\\ z & = & -2t-3\end{array}\right. \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}.$$

   **a.** Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC).

**b.** Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC) sont $(3;1;0)$.

**c.** Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

**3.** Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par A.

**a.** Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

**b.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

**L'annexe est à rendre avec la copie**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère la surface $S_1$ d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface $S_2$ d'équation $z = xy + 2x$.

**PARTIE A**

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 2$, $E_1$ l'intersection de la surface $S_1$ et du plan $\mathcal{P}$ et $E_2$ l'intersection de la surface $S_2$ et du plan $\mathcal{P}$.

En **annexe**, le plan $\mathcal{P}$ est représenté muni du repère $\left(A\,;\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ où A est le point de coordonnées $(2;0;0)$.

**1. a.** Déterminer la nature de l'ensemble $E_1$.

**b.** Déterminer la nature de l'ensemble $E_2$.

**2. a.** Représenter les ensembles $E_1$ et $E_2$ sur la feuille **annexe**.

**b.** Dans le repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles $E_1$ et $E_2$.

**PARTIE B**

*On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante :*

« *Soient a, b et c des entiers avec a premier. Si a divise bc alors a divise b ou a divise c.* »

L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x\,;\,y\,;\,z)$ des surfaces $S_1$ et $S_2$ où $y$ et $z$ sont des entiers relatifs et $x$ un nombre premier.

On considère un tel point $M(x\,;\,y\,;\,z)$.

**1. a.** Montrer que $y(y-x) = x(2-x)$.

**b.** En déduire que le nombre premier $x$ divise $y$.

**2.** On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**a.** Montrer que $x$ divise 2, puis que $x = 2$.

**b.** En déduire les valeurs possibles de $k$.

**3.** Déterminer les coordonnées possibles de $M$ et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.

**EXERCICE 3** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -11+4i,\ z_B = -3-4i \quad \text{et} \quad z_C = 5+4i.$$

2. Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC.
3. Soit E l'image du point C par la rotation $\mathscr{R}$ de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Montrer que l'affixe de E vérifie $z_E = -3+\left(8\sqrt{2}-4\right)i$.
   Placer le point E.
4. Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathscr{H}$ de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
   Placer le point D.
5. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**
   Soit $\mathscr{D}$ la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].
   Montrer que B, I et J sont alignés.

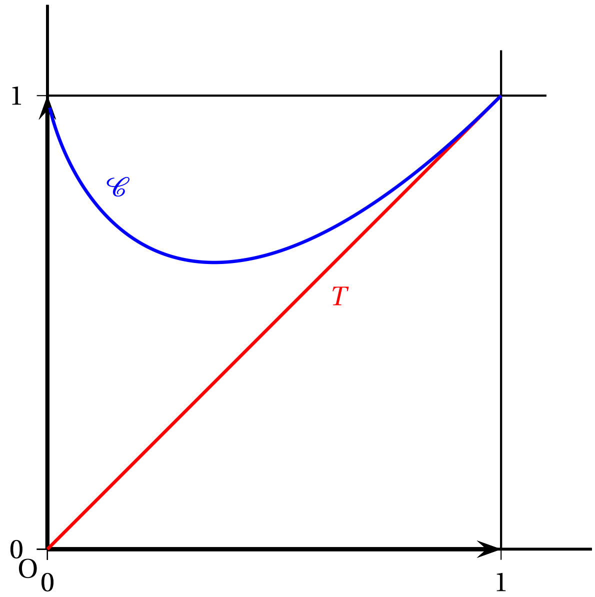
**EXERCICE 4** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit $f$ la fonction définie pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = 1 + x\ln x.$$

On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
$T$ est la droite d'équation $y = x$.
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite $T$ sont représentées sur le schéma ci-dessous.




1. **a.** Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

   **b.** En utilisant le signe de $x \ln x$ sur $]0~;~1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in ]0~;~1]$, on a $f(x) \leqslant 1$.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in ]0~;~1]$.

   **b.** Vérifier que la droite $T$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3. On note $g$ la fonction définie pour tout nombre réel $x \in ]0~;1]$ par

$$g(x) = 1 + x \ln x - x.$$

   **a.** Étudier les variations de $g$ sur l'intervalle $]0~;~1]$ et dresser le tableau de variation de $g$.

   On ne cherchera pas la limite de $g$ en 0.

   **b.** En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $T$.

4. Soit $\alpha$ un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.

   On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} \left[1 - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

   **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

   **b.** Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.

   **c.** Interpréter graphiquement le résultat précédent.

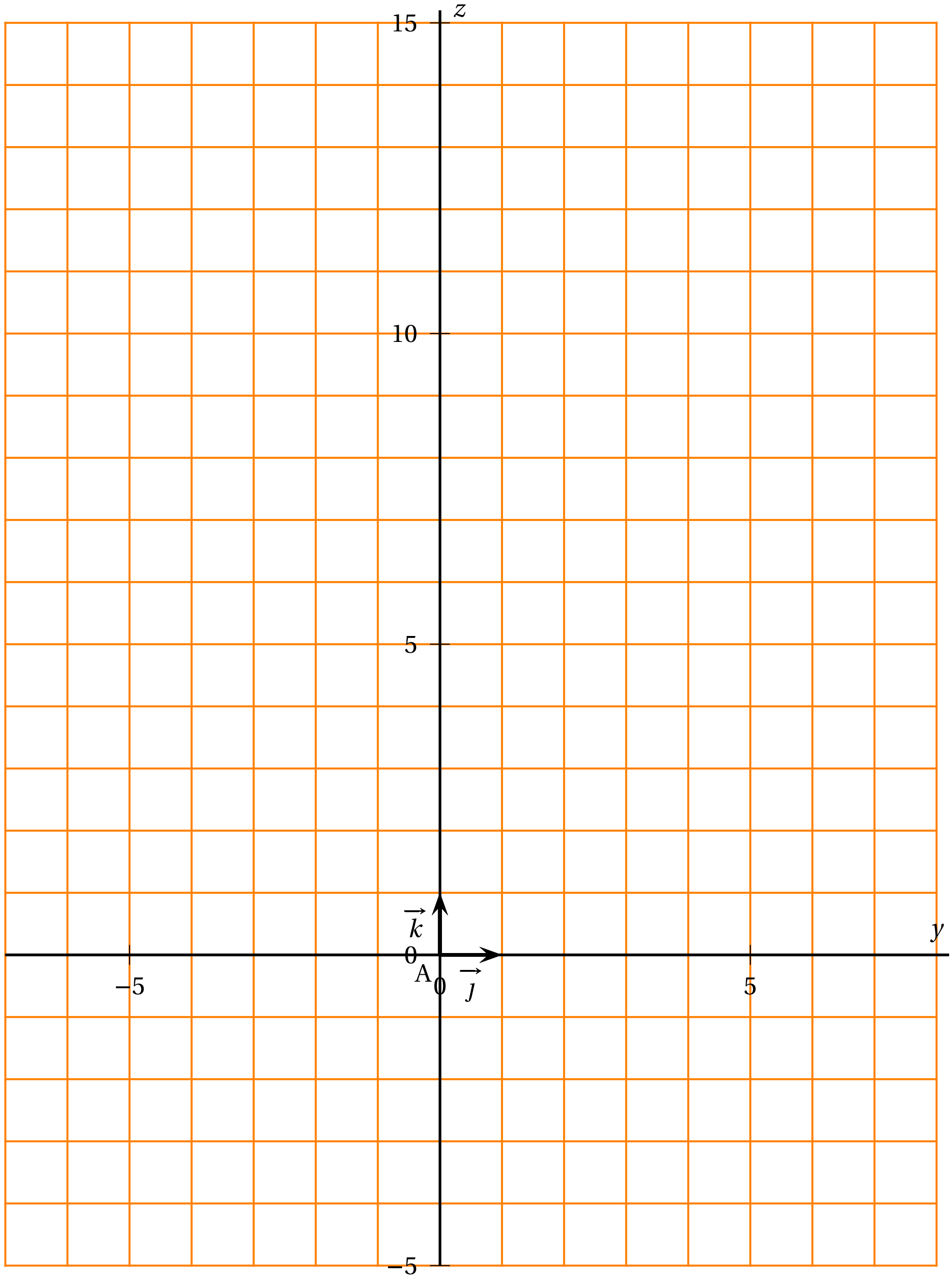
   **d.** À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite $T$ et l'axe des ordonnées.

**ANNEXE**

**Exercice 2**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

**À rendre avec la copie**



**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Métropole & La Réunion 10 septembre 2009 ∾

**EXERCICE 1** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+4\right).$$

**PARTIE A**

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   - **a.** Étudier le sens de variation de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   - **b.** Montrer que sur l'intervalle $[2~;~3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera $\alpha$.
     Donner la valeur arrondie de $\alpha$ à $10^{-1}$.
   - **c.** Justifier que le nombre réel $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

**PARTIE B**

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $f$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. À partir de $u_0$, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\Delta$, on a placé $u_1$ sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes $u_2$ et $u_3$ sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
2. Placer le point $I$ de la courbe $\mathcal{C}$ qui a pour abscisse $\alpha$.
3. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel $n$, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   - **b.** Démontrer que la suite $(u_n)$ converge.
   - **c.** Déterminer sa limite.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y - 1 = 0$ et par $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $y + z - 2 = 0$.
   Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite $\mathcal{D}$, dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = \quad t \\ z = 2 - t \end{array}\right.$, où $t$ désigne un nombre réel.
2. **a.** Déterminer une équation du plan $\mathcal{R}$ passant par le point O et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$.
   **b.** Démontrer que le point I, intersection du plan $\mathcal{R}$ et de la droite $\mathcal{D}$, a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1).
3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et (1 ; 1 ; 0).
   **a.** Vérifier que les points A et B appartiennent au plan $\mathcal{R}$.
   **b.** On appelle A$'$ et B$'$ les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.
   Justifier que le quadrilatère ABA' B' est un losange.
   **c.** Vérifier que le point S de coordonnées (2 ; $-1$ ; 3) appartient à la droite $\mathcal{D}$.
   **d.** Calculer le volume de la pyramide SABA$'$B$'$.
   *On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est :* $V = \dfrac{1}{3} b \times h$.

**EXERCICE 3** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

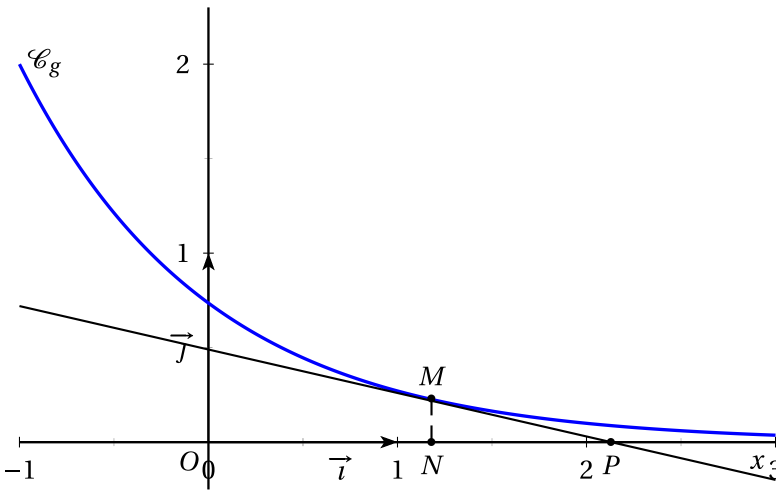
**PARTIE A**

Soit $f$ la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit $a$ un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M$ d'abscisse $a$ coupe l'axe des abscisses au point $P$ d' abscisse $a - 1$.
2. Soit $N$ le projeté orthogonal du point $M$ sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{NP} = -\vec{\imath}$

**PARTIE B**

Soit $g$ une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout nombre réel $x$.
On appelle $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction $g$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit $a$ un nombre réel. On considère le point $M$ de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $a$ et le point $N$ projeté orthogonal du point $M$ sur l'axe des abscisses.
Soit $P$ le point d'intersection de la tangente $T_a$ à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point $M$ avec l'axe des abscisses.
Le graphique ci-dessous illustre la situation de la partie B.




1. Démontrer que le point P a pour coordonnées $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\ ;\ 0\right)$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Existe-t-il une fonction $g$ vérifiant $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{NP} = \vec{\imath}$ ?

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
   **a.** Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
   **b.** Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à $10^{-3}$.
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.

   Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à $10^{-3}$.
3. On note $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

   On rappelle que, pour tout nombre réel $k$ positif : $P(X \leqslant k) = \displaystyle\int_0^k \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

   **a.** Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1\,000\lambda}$.
   **b.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à $10^{-4}$ du paramètre $\lambda$.

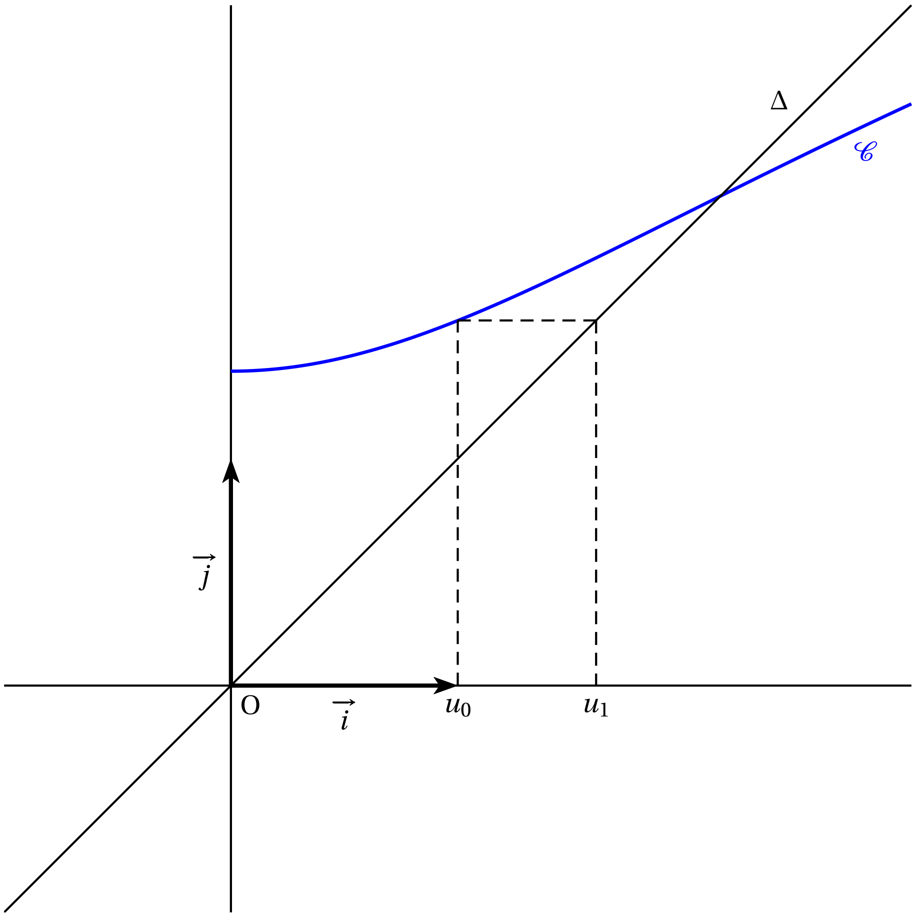
**EXERCICE 4** **5 points**

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. **a.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
   **b.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{10}$ par 11.
   **c.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009} + 2\,009$ par 11.
2. On désigne par $p$ un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.
   On note $d_n$ le PGCD de $A_n$ et $A_{n+1}$.
   **a.** Montrer que $d_n$ divise $2^n$.
   **b.** Déterminer la parité de $A_n$ en fonction de celle de $p$. Justifier.
   **c.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la parité de $d_n$ en fonction de celle de $p$.
   En déduire le PGCD de $2^{2\,009} + 2\,009$ et $2^{2\,010} + 2\,009$.

**ANNEXE DE L'EXERCICE 1**

(à rendre avec la copie)



**Durée : 4 heures**

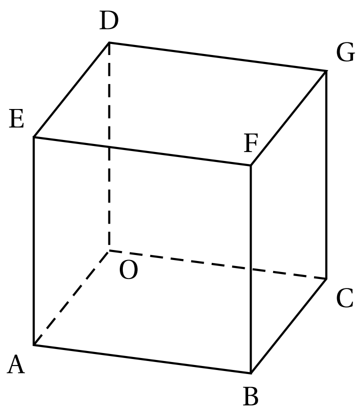
# Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2009

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.
Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.
Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.
On appelle R le barycentre des points pondérés (B, −1) et (F, 2).
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O~;~\overrightarrow{OA},~\overrightarrow{OC},~\overrightarrow{OD}\right)$.

1. **a.** Démontrer que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).
   **b.** Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.
   **c.** Quelle est la nature du triangle PQR ?
2. **a.** Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x+2y+z-8=0$.
   **b.** Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).
3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).
   **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).
   **b.** Déterminer les coordonnées du point H.
   **c.** Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).




**EXERCICE 2** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

*Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.*
*Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse.* ***Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention VRAIE ou FAUSSE****.*

*Pour chaque question, il est compté* 1 *point si les deux réponses sont exactes,* 0,5 *point pour une réponse exacte et une absence de réponse et* 0 *point sinon.*

| | | |
|---|---|---|
| **Question A**<br>Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher.<br>On tire deux boules au hasard simultanément.<br>On considère les évènements :<br>$A$ : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ;<br>$B$ : « une seule des deux boules tirées est rouge ». | Proposition 1<br>La probabilité de $A$ est égale à $\frac{3}{7}$. | Proposition 2<br>La probabilité de $B$ est égale à $\frac{1}{7}$. |
| **Question B**<br>Soient $A$, $B$ et $C$ trois évènements d'un même univers $\Omega$ muni d'une probabilité $P$.<br>On sait que :<br>• $A$ et $B$ sont indépendants ;<br>• $P(A) = \frac{2}{5}$ ; $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ;<br>• $P(C) = \frac{1}{2}$ ; $P(A \cap C) = \frac{1}{10}$. | Proposition 3<br>$P(B) = \frac{7}{12}$ | Proposition 4<br>$P\left(\overline{A \cup C}\right) = \frac{2}{5}$.<br>$\overline{A \cup C}$ désigne l'évènement contraire de $A \cup C$. |
| **Question C**<br>Une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ où $n$ est égal à 4 et $p$ appartient à $]0\,;\,1[$. | Proposition 5<br>Si $P(X=1) = 8P(X=0)$ alors $p = \frac{2}{3}$. | Proposition 6<br>Si $p = \frac{1}{5}$ alors $P(X=1) = P(X=0)$. |
| **Question D**<br>La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire $X$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}07$ sur $[0\,;\,+\infty[$.<br>On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$ est donnée par :<br>$P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ (avec $\lambda = 0{,}07$). | Proposition 7<br>La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à $10^{-2}$ près. | Proposition 8<br>Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à $10^{-2}$ près. |

**EXERCICE 3** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire**

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On appelle $(\Gamma)$ le cercle de centre O et de rayon 1.

*On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.*

On appelle $F$ l'application du plan $P$ privé du point O dans $P$ qui, à tout point $M$ différent de O, d'affixe $z$, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = z + \mathrm{i} - \frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \mathrm{i}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A′ et B′ par $F$ d'affixes respectives $a'$ et $b'$.
   **a.** Calculer $a'$ et $b'$.
   **b.** Placer les points A, A′, B et B′.
   **c.** Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.
   **d.** En déduire la nature du triangle OBB′.
2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan $P$ privé du point O qui ont pour image par $F$, le point O.

**a.** Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$,

$$z^2+\mathrm{i}z-1=\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

**b.** En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

**c.** Démontrer que les points de (E) appartiennent à $(\Gamma)$.

**3.** Soit $\theta$ un réel.

**a.** Démontrer que si $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $z'=(2\sin\theta+1)\mathrm{i}$.

**b.** En déduire que si $M$ appartient au cercle $(\Gamma)$ alors $M'$ appartient au segment $[\mathrm{A}'\mathrm{C}]$ où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.

**EXERCICE 4** **7 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=-nx-x\ln x.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

Les courbes $(\mathscr{C}_0)$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ représentatives des fonctions $f_0$, $f_1$ et $f_2$ sont données en annexe.

On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x=0$.

**Partie A : Étude de la fonction $f_0$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f_0(x)=-x\ln x$**

1. Déterminer la limite de $f_0$ en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction $f_0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction $f_n$, $n$ entier naturel**

Soit $n$ un entier naturel.

**1.** Démontrer que pour $x\in]0\,;\,+\infty[$, $f_n'(x)=-n-1-\ln x$ où $f_n'$ désigne la fonction dérivée de $f_n$.

**2.** **a.** Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ admet en un unique point $A_n$ d'abscisse $\mathrm{e}^{-n-1}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

**b.** Prouver que le point $A_n$ appartient à la droite $\Delta$ d'équation $y=x$.

**c.** Placer sur la figure en annexe les points $A_0$, $A_1$, $A_2$.

**3.** **a.** Démontrer que la courbe $(\mathscr{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté $B_n$, dont l'abscisse est $\mathrm{e}^{-n}$.

**b.** Démontrer que la tangente à $(\mathscr{C}_n)$ au point $B_n$ a un coefficient directeur indépendant de l'entier $n$.

**c.** Placer sur la figure en annexe les points $B_0$, $B_1$, $B_2$.

**Partie C : Calculs d'aires**

Pour tout entier naturel $n$, on considère le domaine du plan $D_n$ délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C}_n)$ et les droites d'équation $x=\mathrm{e}^{-n-1}$ et $x=\mathrm{e}^{-n}$.

On note $I_n$ l'aire en unités d'aires du domaine $D_n$.

**1.** Hachurer, sur la figure donnée en annexe, les domaines $D_0, D_1, D_2$.

**2.** **a.** À l 'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} x \ln x \,\mathrm{d}x$.

**b.** En déduire que $I_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4\mathrm{e}^2}$.

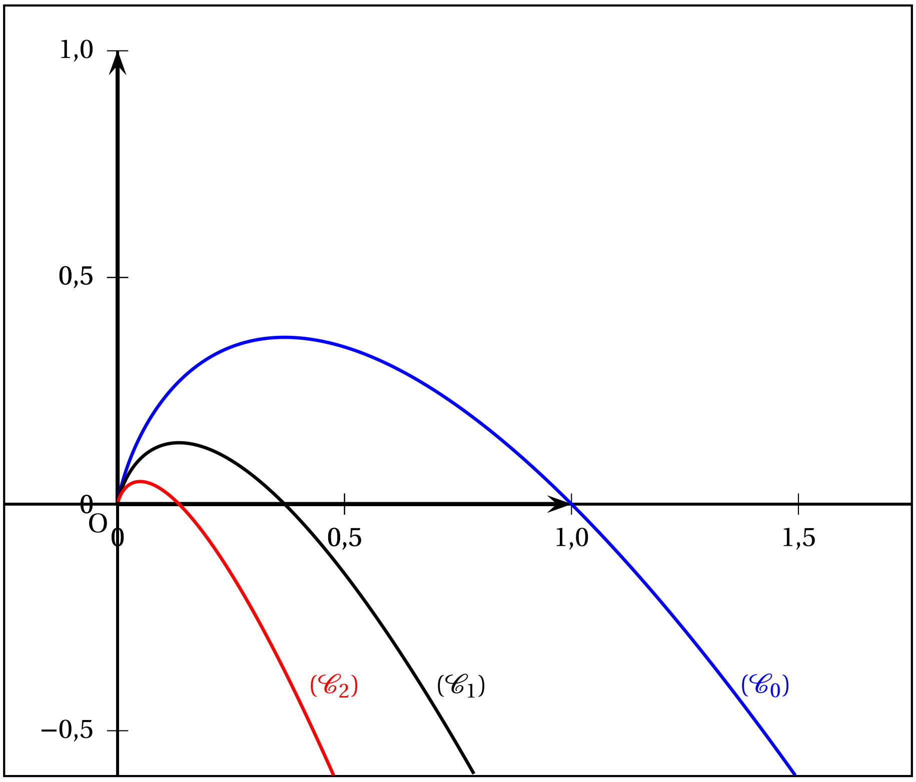
**c.** On admet que le domaine $D_{n+1}$ est l'image du domaine $D_n$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Exprimer $I_1$ et $I_2$ en fonction de $I_0$.

**ANNEXE**

**Cette page sera complétée et remise à la fin de l'épreuve**

**Exercice 4**



**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2009 ∽



**EXERCICE 1** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prend 1 cm comme unité.

**Partie A — Restitution organisée de connaissances**

Soit D le point de coordonnées $(x_D, y_D, z_D)$ et $P$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan $P$ est donnée par :

$$d(D,P) = \frac{\left|ax_D + by_D + cz_D + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**Partie B**

On considère les points A de coordonnées (3 ; −2 ; 2), B de coordonnées (6 ; −2 ; −1), C de coordonnées (6 ; 1 ; 5) et D de coordonnées (4 ; 0 ; −1).

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
   En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; −2 ; 1) est normal au plan (ABC).
   Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

**Partie C**

Soit $Q$ le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans $Q$ et (ABC).
2. $Q$ coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.
   Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (−2) et on définit l'application $f$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ et différent de A associe le point $M'$ d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}.$$

1. **a.** Déterminer l'affixe du point P′ image par $f$ du point P d'affixe $(1+\mathrm{i})$.
   **b.** Montrer que les droites (AP) et (BP′) sont parallèles.
   **c.** Établir que les droites (AP) et (PP′) sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$ (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $M' = M$).

On cherche à généraliser les propriétés **1. b** et **1. c** pour obtenir une construction de l'image $M'$ d'un point $M$ quelconque du plan.

3. **a.** Montrer que pour tout nombre complexe $z$, le nombre $(z-2)\left(\overline{z}-2\right)$ est réel.
   **b.** En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.
   **c.** Montrer que les droites (A$M$) et (B$M'$) sont parallèles.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit $M$ un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question **1.c**.
5. Soit $M$ un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point $M'$ image de $M$ par $f$. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2\mathrm{i}$.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On considère un carré direct ABCD (c'est à dire un carré ABCD tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\quad [2\pi]\Big)$ de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DA].
$\Gamma_1$ désigne le cercle de diamètre [AI] et $\Gamma_2$ désigne le cercle de diamètre [BK].

**Partie A**

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe $s$ telle que $s(\mathrm{A}) = \mathrm{I}$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{K}$.
2. Montrer que les cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ se coupent en deux points distincts : le point J et le centre $\Omega$ de la similitude directe $s$.
3. **a.** Déterminer les images par $s$ des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par $s$.
   **b.** Soit E l'image par $s$ du point I. Démontrer que E est le milieu du segment [ID].
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Démontrer que les points A, $\Omega$ et E sont alignés.
   (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

**Partie B**

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{A}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.
2. Démontrer que la similitude directe $s$ a pour écriture complexe

$$z' = \frac{\mathrm{i}}{2}z + 5 + 5\mathrm{i}.$$

3. Calculer l'affixe $\omega$ du centre $\Omega$ de $s$.
4. Calculer l'affixe $z_{\mathrm{E}}$ du point E et retrouver l'alignement des points A, $\Omega$ et E.
5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point $\Omega$.

**EXERCICE 3** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à $10^{-2}$ près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right) \mathrm{d}x$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0~;~1]$.

   **b.** Montrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0~;~1]$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2. Soit $J$ et $K$ les intégrales définies par $J = \displaystyle\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   **a.** Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

   **b.** Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

   **c.** Démontrer que $J + K = 4I$.

   **d.** Déduire de tout ce qui précède un encadrement de $I$, puis donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près de $I$.

**EXERCICE 4** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites ($A$, $B$ et $C$), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu $B$ aux première et deuxième questions, $A$ aux troisième et quatrième questions et $C$ à la cinquième question.

1. **a.** Combien y-a-t'il de mots-réponses possibles à ce questionnaire ?

   **b.** On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

   Calculer la probabilité des évènements suivants :

   $E$ : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

$F$ : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

$G$ : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

**2.** Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

On désigne par $X$ le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

**a.** Justifier que la variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et
$p = \dfrac{32}{243}$.

**b.** Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-2}$, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2009 ∾

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   **b.** Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de $f$.
   **c.** En déduire le signe de $f$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout nombre réel $a$, on considère l'intégrale : $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$.
   **a.** Donner selon les valeurs de $a$ le signe de $I(a)$.
   **b.** À l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel $a$ :
   $$I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$
   **c.** En déduire pour tout nombre réel $a$ :
   $$\frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$
3. Soient $g$ et $h$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$ et $h(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
   On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $g$ et $\mathscr{P}$ celle de $h$.
   **a.** Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ ont la même tangente au point d'abscisse 0.
   **b.** Déduire des questions précédentes la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère l'évènement :

— $T_n$ : « le manchot utilise le toboggan lors de son $n$-ième passage. »
— $P_n$ : « le manchot utilise le plongeoir lors de son $n$-ième passage. »

On considère alors la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

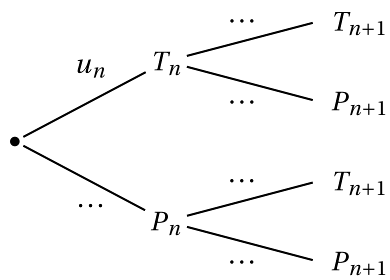
$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement $T_n$.

**1.** **a.** Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

**b.** Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.

**c.** Recopier et compléter l'arbre suivant :




**d.** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2$.

**e.** À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite $(u_n)$.

**2.** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

**a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

**b.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**c.** Calculer la limite de la suite $(u_n)$. Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en **1. e.** ?

## EXERCICE 2 — 5 points

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Soit $n$ un entier naturel non nul.

**1.** On considère l'équation notée $(E)$ :

$$3x + 7y = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

**a.** Déterminer un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tels que $3u + 7v = 1$.
En déduire une solution particulière $(x_0\,;\,y_0)$ de l'équation $(E)$.

**b.** Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\,;\,y)$ solutions de $(E)$.

**2.** On considère l'équation notée $(G)$

$$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

**a.** Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
Démontrer que si $(x~;~y)$ est solution de $(G)$ alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).

**b.** Reproduire et compléter le tableau suivant :

| Reste de la division euclidienne de $x$ par 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7. | | | | | | | |

**c.** Démontrer que $2^n$ est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation $(G)$ n'admet pas de solution.

**EXERCICE 3** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}~;~\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\,(2~;~1~;~1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{IK}}$ et à $\overrightarrow{\text{IJ}}$.
   En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x+2y+2z-5=0$.
3. **a.** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).
   **b.** En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4}~;~1~;~0\right)$.
   **c.** Placer le point R sur la figure.
4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.
5. **a.** Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.
   **b.** Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par F.
   Justifier que la sphère $\mathcal{S}$ et le plan (IJK) sont sécants.
   Déterminer le rayon de leur intersection.

**EXERCICE 4** **5 points**
**Commun à tous les candidats**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_\text{A} = 1+\text{i}\sqrt{3}$, $z_\text{B} = 2\text{i}$.

1. **a.** Écrire $z_\text{A}$ et $z_\text{B}$ sous forme exponentielle.
   **b.** Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.
   **c.** Déterminer la nature du triangle OAB.
2. On note $r$ la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point $M$ d' affixe $z$, on note $M'$ l'image de $M$ par $r$ et $z'$ l'affixe du point $M'$.

**a.** Calculer un argument du quotient $\dfrac{z_B}{z_A}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

**b.** En déduire l'écriture complexe de la rotation $r$.

**3.** Soient $\Gamma$ le cercle de centre A passant par O et $\Gamma'$ le cercle de centre B passant par O.

Soit C le deuxième point d'intersection de $\Gamma$ et $\Gamma'$ (autre que O). On note $z_C$ son affixe.

**a.** Justifier que le cercle $\Gamma'$ est l'image du cercle $\Gamma$ par la rotation $r$.

**b.** Calculer l'affixe $z_I$ du milieu I de [AB].

**c.** Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

**d.** En déduire que I est le milieu de [OC] puis montrer que l'affixe de C est :

$$z_C = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\text{i}.$$

**4.** Soit D le point d'affixe $z_D = 2\text{i}\sqrt{3}$.

**a.** Justifier que le point D appartient au cercle $\Gamma$. Placer D sur la figure.

**b.** Placer D′ image de D par la rotation $r$ définie à la question 2.
On note $z_{D'}$ l'affixe de D′.
Montrer que $z_{D'} = -\sqrt{3} + 3\text{i}$.

**5.** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DD'}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

**ANNEXE**

**Exercice 3**

**Commun à tous les candidats**

**À rendre avec la copie**