Baccalauréat S 2011

L'intégrale d'avril 2011 à mars 2012

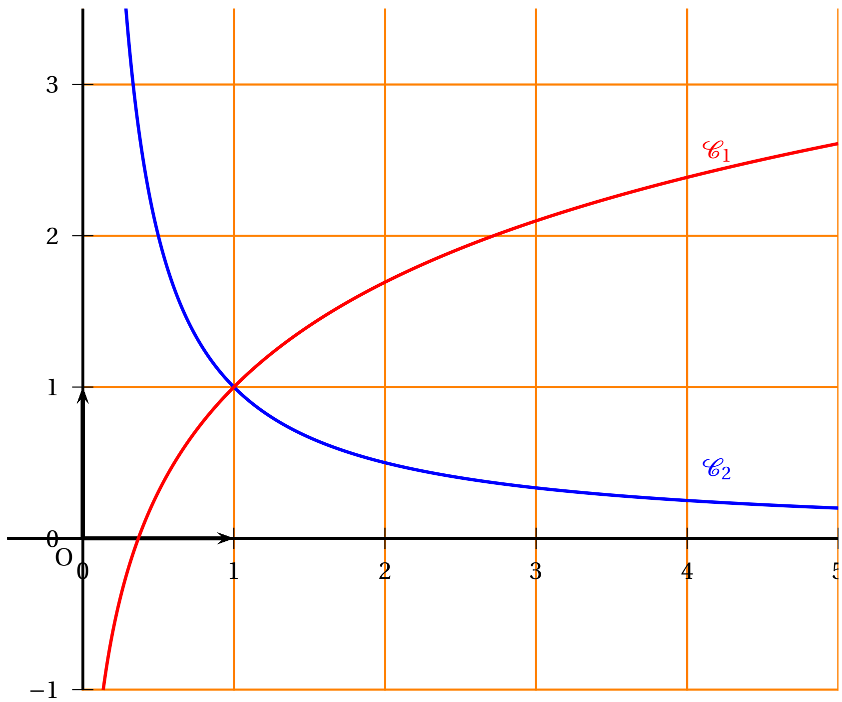
Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

∽ Baccalauréat S Pondichéry 13 avril 2011 ∾

Le sujet est composé de 3 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.

Exercice 1 **10 points**
Commun à tous les candidats

Partie I
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.



On sait que :

— l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$
— l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$
— la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$
— la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$
— la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des quatre questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

- 0
- $+\infty$
- On ne peut pas conclure

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

- 0
- 0,2
- On ne peut pas conclure

3. En $+\infty$, $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote oblique :

- Oui
- Non
- On ne peut pas conclure

4. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

-

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	$+$

-

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	$-$

-

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	‖	$+ \quad 0 \quad -$

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par
$F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{\text{e}}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1~;~+\infty[$ qu'on note α.

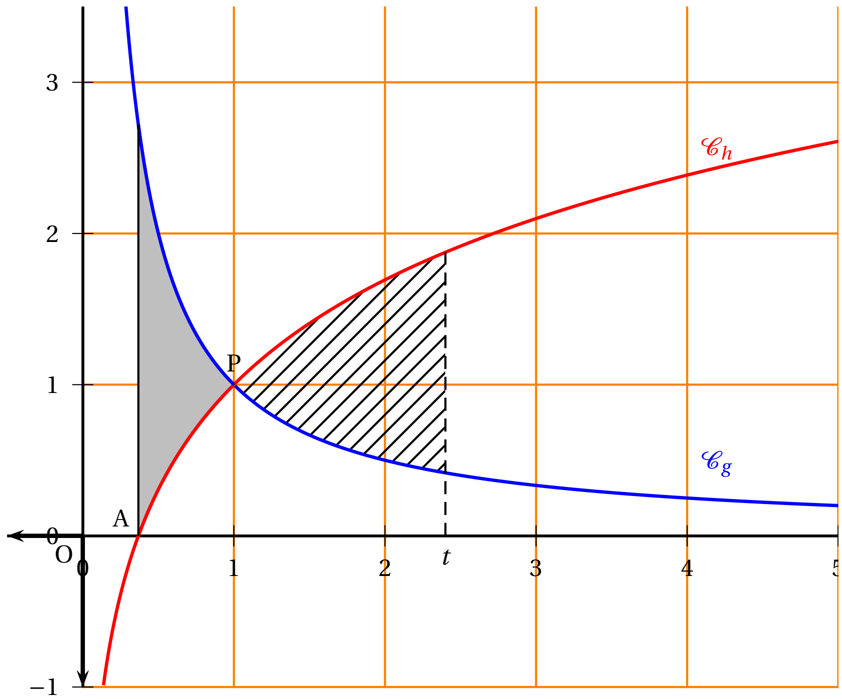
7. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.



1. A est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.

2. P est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont $(1\,;\,1)$.

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\text{e}}$ et $x = 1$ (domaine grisé sur le graphique).

a. Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie II.

b. Montrer que $\mathscr{A} = 1 - \dfrac{1}{\text{e}}$.

4. Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$. On note $\mathscr{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).

On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_t$.

a. Montrer que $\mathscr{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.

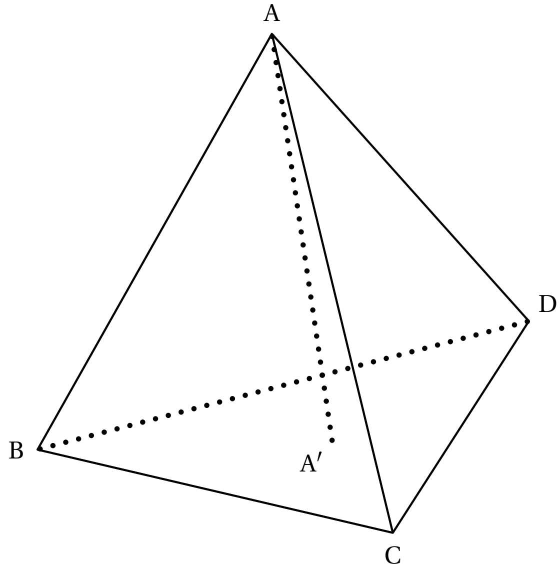
b. Conclure.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1

Dans cette partie, ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.



A′ est le centre de gravité du triangle BCD.

Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment [AA′] est une médiane du tétraèdre ABCD.

1. On souhaite démontrer la propriété suivante :

($\mathscr{P}_1$) : *Dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.*

a. Montrer que $\overrightarrow{\text{AA}'} \cdot \overrightarrow{\text{BD}} = 0$ et que $\overrightarrow{\text{AA}'} \cdot \overrightarrow{\text{BC}} = 0$. (On pourra utiliser le milieu I du segment [BD] et le milieu J du segment [BC]).

b. En déduire que la médiane (AA′) est orthogonale à la face BCD.

Un raisonnement analogue montre que les autres médianes du tétraèdre régulier ABCD sont également orthogonales à leur face opposée.

2. G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.

On souhaite démontrer la propriété suivante :

($\mathscr{P}_2$) : *Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en* G.

En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite $\left(\text{AA}'\right)$, puis conclure.

Partie II

On munit l'espace d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère les points P(1 ; 2 ; 3), Q(4 ; 2 ; −1) et R(−2 ; 3 ; 0).

1. Montrer que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.

2. Calculer les coordonnées de P′, centre de gravité du triangle OQR.

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est : $3x + 2y + 16z = 0$.

4. La propriété ($\mathscr{P}_1$) de la partie 1 est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère, dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathscr{S}$ d'équation :

$$z = (x - y)^2.$$

1. On note $\mathscr{E}_1$ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de $\mathscr{E}_1$. On note $\mathscr{E}_2$ l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation $x = 1$.
Déterminer la nature de $\mathscr{E}_2$.

Partie B

On considère, dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ de l'espace, la surface $\mathscr{S}'$ d'équation :

$$z = xy.$$

1. On note $\mathscr{E}_3$ l'intersection de $\mathscr{S}'$ avec le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $z = 0$.
Déterminer la nature de $\mathscr{E}_3$
2. On note $\mathscr{E}_4$ l'intersection de $\mathscr{S}'$ avec le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation $z = 1$.
Déterminer la nature de $\mathscr{E}_4$.

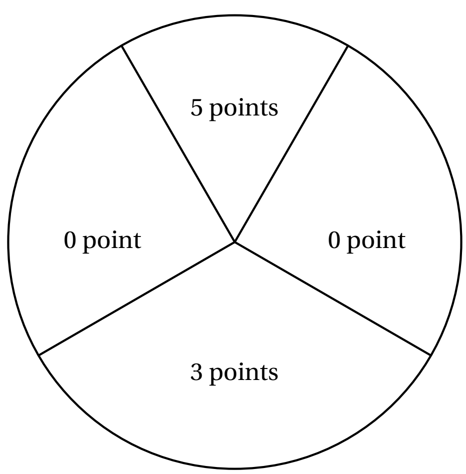
Partie C

On note $\mathscr{E}_5$ l'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{S}'$.
Dans cette partie, on souhaite démontrer que le seul point appartenant à $\mathscr{E}_5$ dont les coordonnées sont des entiers naturels est le point $O(0\,;0\,;0)$.
On suppose qu'il existe un point M appartenant à $\mathscr{E}_5$ et dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

1. Montrer que si $x = 0$, alors le point M est le point O.
2. On suppose dorénavant que l'entier x n'est pas nul.
   a. Montrer que les entiers x, y et z vérifient $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.
   En déduire qu'il existe alors des entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x'^2 - 3x'y' + y'^2 = 0$.
   b. Montrer que x' divise y'^2, puis que x' divise y'.
   c. Établir que y' vérifie la relation $1 - 3y' + y'^2 = 0$.
   d. Conclure.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.
On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \dfrac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \dfrac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p\left(G_2\right) = \dfrac{5}{36}$.
On admettra dans la suite que $p\left(G_3\right) = \dfrac{7}{36}$

b. En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Baccalauréat S Amérique du Nord 27 mai 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = \text{i}$ et $b = 1+\text{i}$.
On note : r_{A} la rotation de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, r_{B} la rotation de centre B, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_{O} la rotation de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3\text{i}$. On appelle D l'image de C par r_{A}, G l'image de D par r_{B} et H l'image de C par r_{O}.
On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2+\text{i}$.
2. Déterminer g et h.
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m. On appelle N l'image de M par r_{A}, P l'image de N par r_{B} et Q l'image de M par r_{O}.
On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = \text{i}m+1+\text{i}$. On admettra que $p = -m+1+\text{i}$ et $q = -\text{i}m$.
2. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.
3. **a.** Montrer l'égalité : $\dfrac{m-n}{p-n} = \text{i}+\dfrac{1}{m}$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle.

EXERCICE 2 **4 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leqslant t)$, est donnée par : $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.
2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0{,}18$.
   Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?
3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.
   a. On considère un lot de 10 ordinateurs.
   Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.
   b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 3 **5 points**

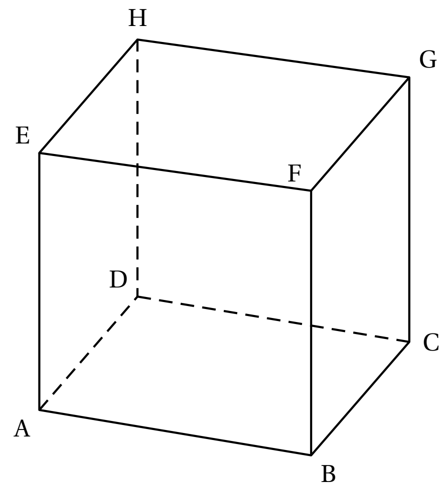
Partie A : Restitution organisée de connaissances

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a, b et c de somme non nulle.
Démontrer que, pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|a\overrightarrow{M\mathrm{A}} + b\overrightarrow{M\mathrm{B}} + c\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c.

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.
Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (BCE).
2. Déterminer une équation du plan (BCE).
3. On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE).
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).
4. Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A.
5. **a.** Démontrer que le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs $1, -1$ et 2.
   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{M\mathrm{R}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} + 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}\right\| = 2\sqrt{2}$.
   c. Démontrer que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).
   d. Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.



EXERCICE 3 **5 points**

Enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p, alors
$q^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{modulo } p)$ ».
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.
   On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n).
4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
   a. Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \quad (\text{modulo } p)$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \quad (\text{modulo } p)$.
   b. En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \quad (\text{modulo } p)$.
   c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $\text{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = \frac{\text{e}^x - 1}{\text{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

   a. Montrer que pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\text{e}^x - x}$.

   b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $[0\,;\,1]$.

3. **a.** Déterminer une primitive de f sur $[0\,;\,1]$.

   b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.

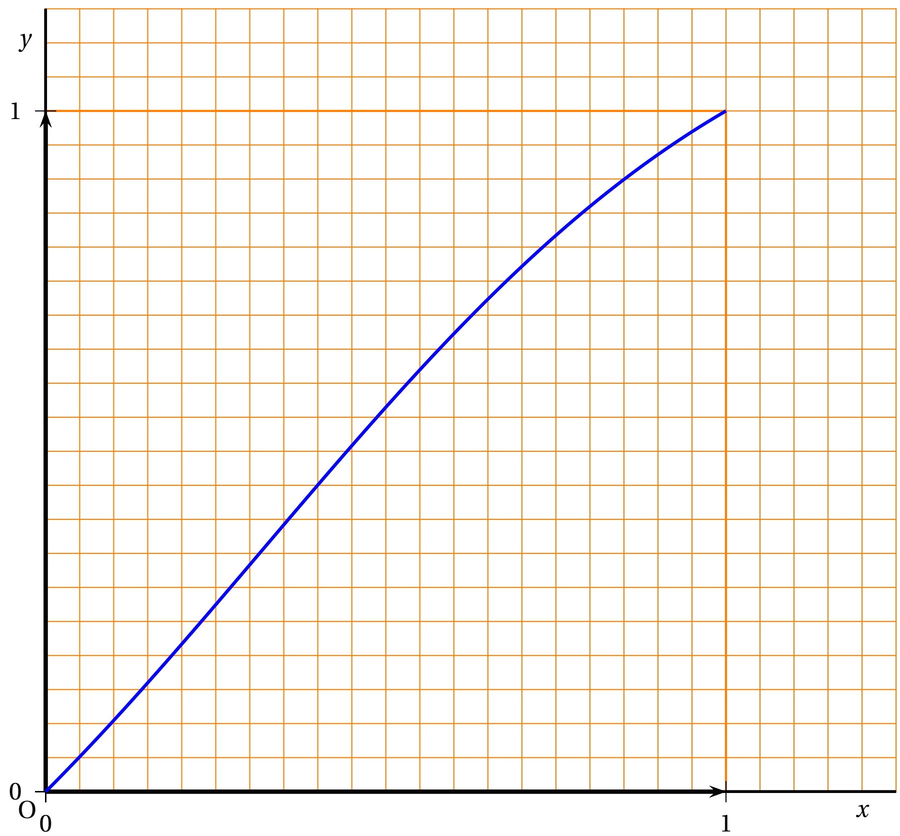
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 4



☙ Baccalauréat S Liban 31 mai 2011 ❧

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on donne les trois points :

$$A(1\,;\ 2\,;\ -1), B(-3\,;\ -2\,;\ 3) \text{ et } C(0\,;\ -2\,;\ -3)$$

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\ -1\,;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x+y-z+2=0$.
   Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3. On appelle G le barycentre des points pondérés $(A,\ 1)$, $(B,\ -1)$ et $(C,\ 2)$.

   a. Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2\,;\ 0\,;\ -5)$.

   b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

   d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).

4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que
   $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué 0,5 *point si la réponse est exacte,* 0 *sinon.*

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.
   D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.
   On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

   a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

   Réponse A : $\dfrac{3}{5}$ **Réponse B :** $\dfrac{4}{5}$ **Réponse C :** $\dfrac{3}{50}$ **Réponse D :** $\dfrac{6}{25}$

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

Réponse A : $\dfrac{21}{50}$ **Réponse B :** $\dfrac{33}{50}$ **Réponse C :** $\dfrac{3}{5}$ **Réponse D :** $\dfrac{12}{25}$

c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

Réponse A : $\dfrac{4}{11}$ **Réponse B :** $\dfrac{6}{25}$ **Réponse C :** $\dfrac{7}{11}$ **Réponse D :** $\dfrac{33}{50}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.
Les boules sont indiscernables au toucher.
L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

Réponse A : $\dfrac{11}{81}$ **Réponse B :** $\dfrac{2}{7}$ **Réponse C :** $\dfrac{5}{84}$ **Réponse D :** $\dfrac{4}{63}$

b. La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

Réponse A : $\dfrac{2}{7}$ **Réponse B :** $\dfrac{1}{7}$ **Réponse C :** $\dfrac{1}{21}$ **Réponse D :** $\dfrac{79}{84}$

c. On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.
Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

Réponse A : 76 **Réponse B :** 71 **Réponse C :** 95 **Réponse D :** 94

EXERCICE 3 **5 points Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire**

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', $\arg\left(z \times z'\right) = \arg(z) + \arg\left(z'\right)$ à 2π près.
Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg\left(z'\right)$ à 2π près.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 - \text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = 2 + \sqrt{3} + \text{i}.$$

1. Déterminer le module et un argument de z_{A}.

2. **a.** Écrire $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}$ sous forme algébrique.

b. Montrer que $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \left(1 + \sqrt{3}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

c. En déduire la forme exponentielle de z_{B}.

3. On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.

a. Déterminer l'affixe du point B_1.

b. En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{u}\right)$.

4. Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{u}\right)$.

On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.

a. Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

b. Soit M un point distinct du point O.

Son affixe z est égale à $\rho\text{e}^{\text{i}\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).

c. Déterminer l'ensemble (E).

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

Prérequis : L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az+b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Démontrer que si A, B, A$'$ et B$'$ sont quatre points du plan tels que A $\neq$ B et A$'$ $\neq$ B$'$, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A$'$ et B en B$'$.

Partie B

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.

On note D le symétrique de A par rapport au point C.

On désigne par s la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2. On appelle Ω le centre de la similitude s.

a. En utilisant la relation $\overrightarrow{\text{DC}} = \overrightarrow{\Omega\text{C}} - \overrightarrow{\Omega\text{D}}$, démontrer que $\text{DC}^2 = \Omega\text{D}^2$.

b. En déduire la nature du triangle ΩDC.

3. On pose $\sigma = s \circ s$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer l'image du point D par la transformation σ.

4. Démontrer que le quadrilatère ADΩB est un rectangle.

5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et 2i.

a. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est :

$z' = (1+\text{i})z + 2 - \text{i}$ où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par s.

b. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.

Démontrer que $\left\{\begin{array}{lll} x' & = & x-y+2 \\ y' & = & x+y-1 \end{array}\right.$

c. Soit J le point d'affixe $1+3\text{i}$.

Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{\text{A}M'} \cdot \overrightarrow{\text{AJ}} = 0$, M' désignant l'image du point M par s ?

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \text{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f\left(u_n\right) = u_n + \text{e}^{-u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   On pourra étudier la fonction g définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,
   $\ln(n) \leqslant u_n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
   $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.
6. **a.** Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,\text{d}x$.

   b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
   Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

☙ Baccalauréat S Polynésie 10 juin 2011 ❧

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

1. Soient A le point d'affixe $2-5\text{i}$ et B le point d'affixe $7-3\text{i}$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-\text{i}| = |z+2\text{i}|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. Soit $z = 3+\text{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|\text{i}+z| = 1+|z|$.
5. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2+\dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 2 — 5 points

Enseignement obligatoire

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$ quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Exercice 2 5 points

Enseignement de spécialité

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors
$a^{p-1} \equiv 1 \quad (\text{modulo}\, p)$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.
3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

   On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) *par certains nombres premiers.*
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \quad (\text{modulo}\, 11)$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.
6. **a.** Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \quad (\text{modulo}\, 17)$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.

Exercice 3 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
  Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si u désigne une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et U une primitive de u sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = [U(x)]_a^b = U(b) - U(a)$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$, démontrer la formule d'intégration par parties.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 \ln x.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ est donnée en annexe.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe $(\mathcal{C})$ passant par O. Préciser une équation de cette tangente.

3. On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe $(\text{O}x)$ de la région plane délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe $(\text{O}x)$ et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\text{e}}$ et $x = 1$.

   On note V une mesure, exprimée en unités de volume, du volume de ce solide et on admet que :

$$V = \int_{\frac{1}{\text{e}}}^{1} \pi [f(x)]^2 \,\text{d}x.$$

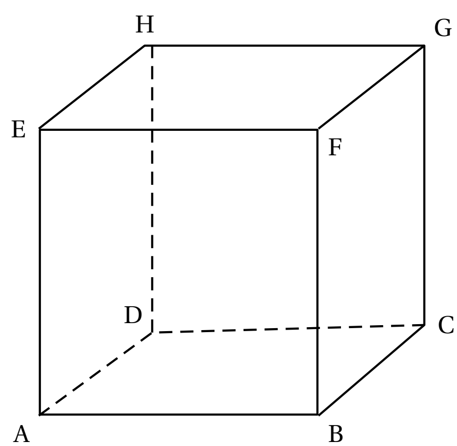
   a. Montrer qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto x^4 \ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$.

   b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que : $V = \dfrac{\pi}{125}\left(2 - \dfrac{37}{\text{e}^5}\right)$.

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats.

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{D}\ ;\ \overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$. On note K le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2).

Partie A

1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$.
2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
3. Calculer la distance EK.

Partie B

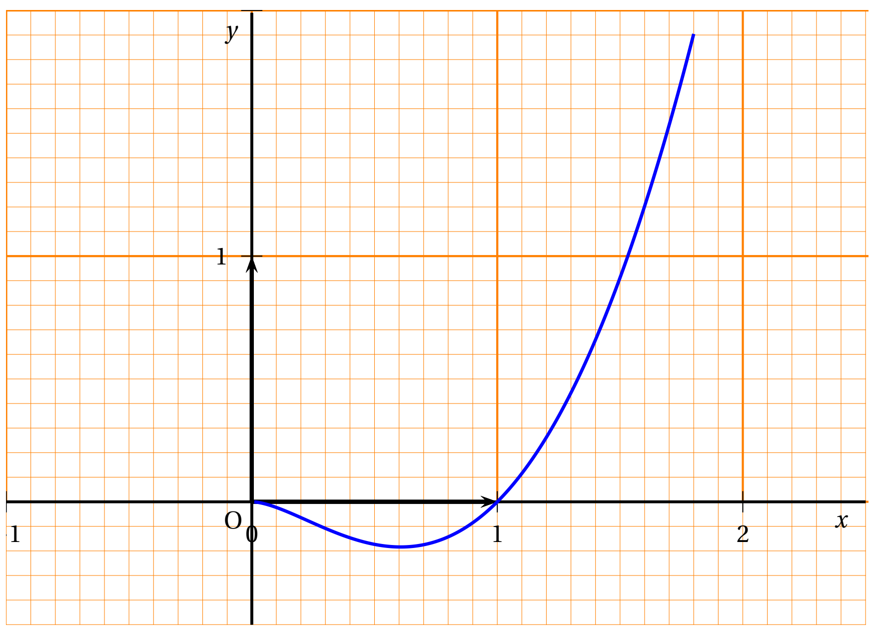
Soit M un point du segment [HG].
On note $m = \text{H}M$ (m est donc un réel appartenant à $[0\,;\,1]$).

1. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, le volume du tétraèdre EMFD, en unités de volume, est égal à $\dfrac{1}{6}$.
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est $(-1+m)x + y - mz = 0$.
3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD).
   a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$,
   $d_m = \dfrac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$.
   b. Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale.
   c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

ANNEXE

Exercice 3

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane 20 juin 2011 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives $a = -3 - \mathrm{i}$, $b = -2 + 4\mathrm{i}$, $c = 3 - \mathrm{i}$ et $h = -2$. Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.
3. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$. En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

4. On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe g du point G. Placer G sur la figure.
5. Montrer que le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit J et l'orthocentre H du triangle ABC sont alignés. Le vérifier sur la figure.
6. On note A' le milieu de $[BC]$ et K celui de $[AH]$. Le point A' a pour affixe $a' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.
   a. Déterminer l'affixe du point K.
   b. Démontrer que le quadrilatère $KHA'J$ est un parallélogramme.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x} - 1.$$

   a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.
   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont donnée en **annexe 1**.
   Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.
   On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{x} > \ln(x)$.
   a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

b. En utilisant la question **1.**, montrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

3. **a.** Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que la fonction h est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0~;~+\infty[$.

b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure jointe en **annexe 1**.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice est questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.
La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

a. 6 **b.** 7 **c.** 10 **d.** 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0~;~+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,2$.
Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

a. 0,271 **b.** 0,135 **c.** 0,865 **d.** 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.
La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a. $\dfrac{125}{3\,888}$ **b.** $\dfrac{625}{648}$ **c.** $\dfrac{25}{7\,776}$ **d.** $\dfrac{3}{5}$

4. Soient A et B deux évènements indépendants d'une même univers Ω tels que $p(A) = 0{,}3$ et $p(A \cup B) = 0{,}65$. La probabilité de l'évènement B est :

a. 0,5 **b.** 0,35 **c.** 0,46 **d.** 0,7

EXERCICE 4 **5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u~;~v)$ tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
   b. En déduire une solution particulière de l'équation (E).

c. Résoudre l'équation (E).

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on considère la droite D d'équation cartésienne $11x-7y-5=0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $0 \leqslant x \leqslant 50$ et $0 \leqslant y \leqslant 50$.

Déterminer le nombre de points de la droite D appartenant à l'ensemble $\mathscr{C}$ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2. On considère l'équation (F) : $11x^2-7y^2=5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod 5$.

b. Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

c. En déduire que si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (F), alors x et y sont des multiples de 5.

3. Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x\,;\,y)$ n'est pas solution de (F). Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3\,;\,-4\,;\,1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1\,;\,-3\,;\,1)$.
On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1-t \\ y &=& 2+t \\ z &=& 1-t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D', distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ.
On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'. Une figure est donnée en **annexe 2**.

1. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1\,;\,0\,;\,-1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,;\,2\,;\,3)$.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P.

b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+2y+3z-4=0$.

3. **a.** Démontrer que le point H' a pour coordonnées $(-1\,;\,2\,;\,1)$.

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. **a.** Déterminer les coordonnées du point H.

b. Calculer la longueur HH'.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

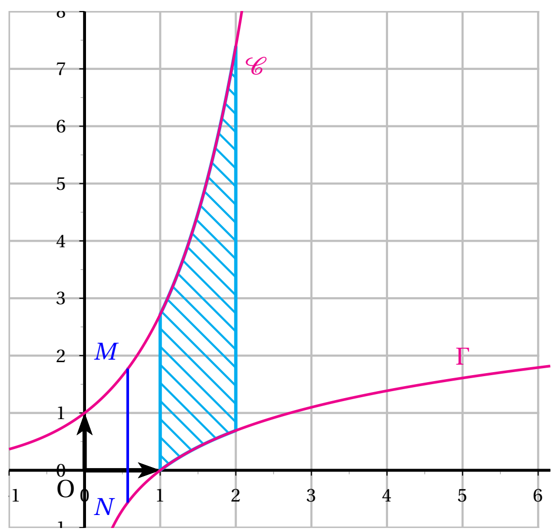
L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D', $MM' \geqslant HH'$.

a. Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.

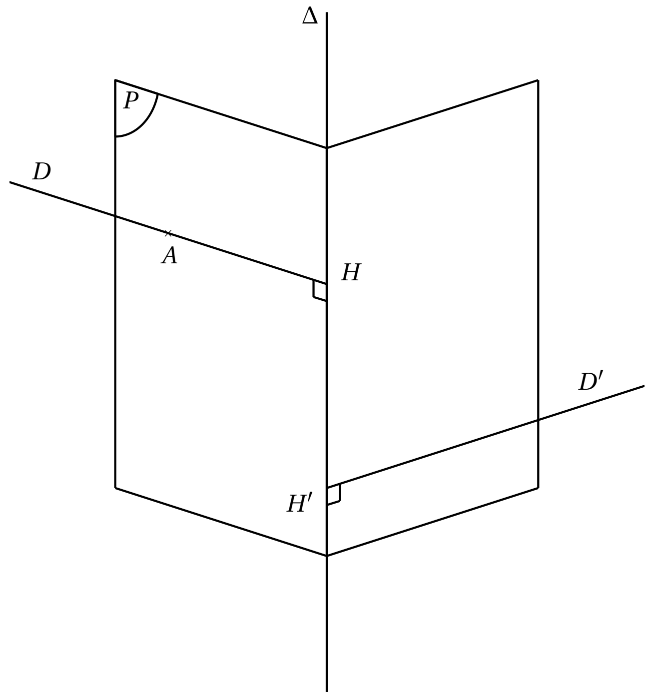
b. En déduire que $\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 \geqslant \left\|\overrightarrow{HH'}\right\|^2$ et conclure.

La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre une point de D et une point de D'. On l'appelle distance entre les droites D et D'.

Annexe 1, exercice 2



Annexe 2, exercice 4 (non spé)


Δ
P
D
A
H
D′
H′

∽ Baccalauréat S Asie 21 juin 2011 ∾

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étude d'une fonction f On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

 a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
 b. Calculer la dérivée f' de la fonction f.
 c. En déduire les variations de la fonction f.

2. Étude d'une fonction g
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

 a. Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.
 Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.
 b. Calculer la dérivée g' de la fonction g.
 c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. **a.** Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.
 b. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
 c. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe $\mathcal{C}_g$.

4. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.
En exprimant l'aire $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire $\mathcal{A}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives
$a = -2$, $b = 5\text{i}$ et $c = 4$ ainsi que les carrés ABIJ, AKLC et BCMN, extérieurs au triangle ABC, de centres respectifs S, T et U.
La figure est donnée en **annexe 2**.

1. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. En déduire que le point J a pour affixe $-7+2\text{i}$.
On admettra que l'affixe du point K est $-2-6\text{i}$.

2. Justifier que les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et que les segments [BK] et [JC] ont la même longueur. Calculer cette longueur.
3. **a.** Calculer les affixes des points S et T.
   b. Déterminer l'affixe du point U.
   c. Démontrer que la droite (AU) est une hauteur du triangle STU.
4. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{JC}}, \overrightarrow{\text{AU}}\right)$.
5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe
   $v = -0,752 + 0,864\text{i}$.
   a. Établir que les points A, V et U sont alignés.
   b. Que représente la droite (AU) pour l'angle $\widehat{\text{BVC}}$?

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1. *On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).*

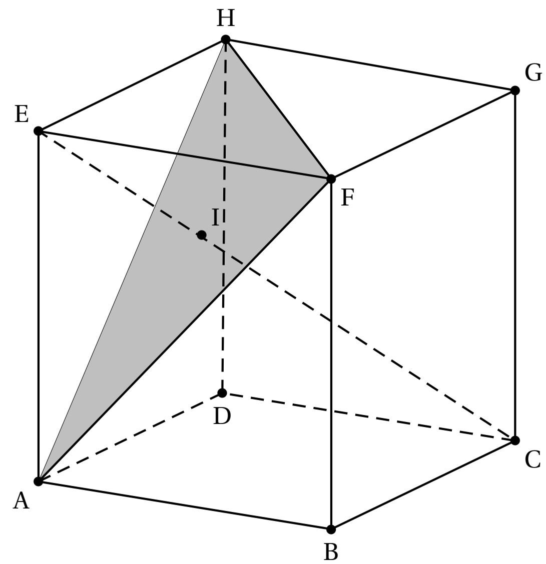
1. On se place dans le repère $\left(\text{D}\,;\,\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DC}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$.
   Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

   A(1 ; 0 ; 0) B(1 ; 1 ; 0) C(0 ; 1 ; 0) D(0 ; 0 ; 0) E(1 ; 0 ; 1) F(1 ; 1 ; 1) G(0 ; 1 ; 1) H(0 ; 0 ; 1)

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).
   c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).
   d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
   e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).
   Que représente le point I pour le triangle AFH ?
2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Définitions :

   - un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
   - il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
   - il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

   Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.



EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par :

$$F(t) = p(X \leqslant t) = p([0\,;\,t]) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Restitution organisée de connaissances

   Pré-requis :

   a. $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$) ;

   b. $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où A est un évènement) ;

   c. $p([a\,;\,b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

   Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a :

   $$p_{[t\,;\,+\infty]}([t\,;\,t+s]) = \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)},$$

   et que $p_{[t\,;\,+\infty]}([t\,;\,t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $\mathrm{e}^{-0,4}$.
3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.

   Dans cette question, les probabilités seront **arrondies à la sixième décimale**.

   a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

Démontrer que tout nombre entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).

2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

Partie B

Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives :

$$\Gamma :\ z = xy \quad \text{et} \quad C :\ x^2 + z^2 = 1.$$

1. Donner la nature de la surface C et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C

a. Démontrer que les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que :

$$x^2\left(1 + y^2\right) = 1.$$

b. En déduire que Γ et C ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

3. Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geqslant 2$.

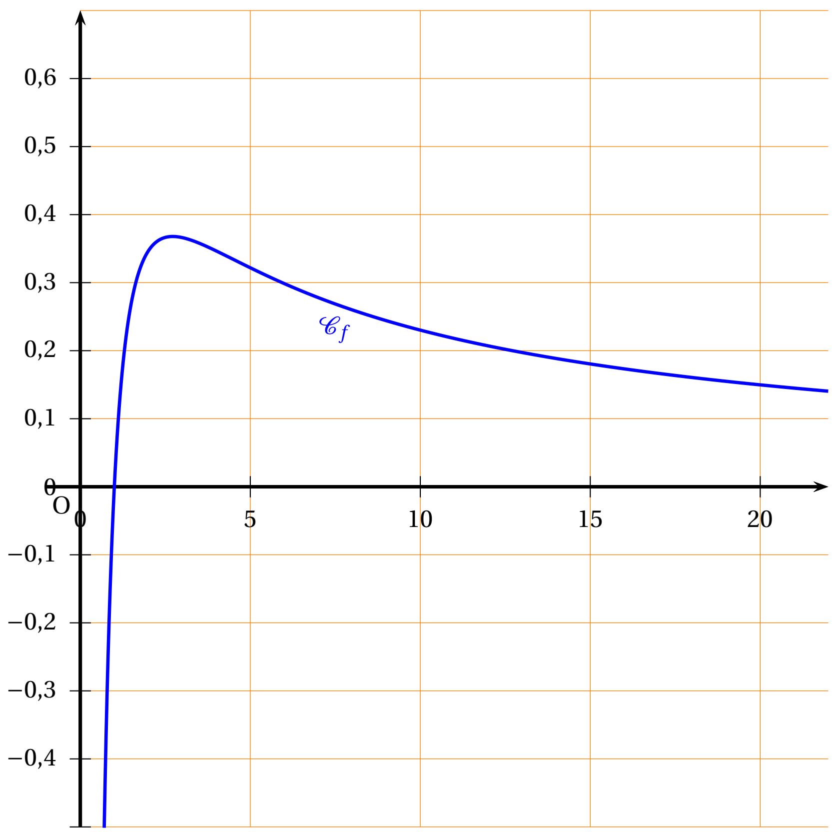
b. Vérifier que : $\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right) = n^4 + 4$.

c. Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel $n \geqslant 2$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.

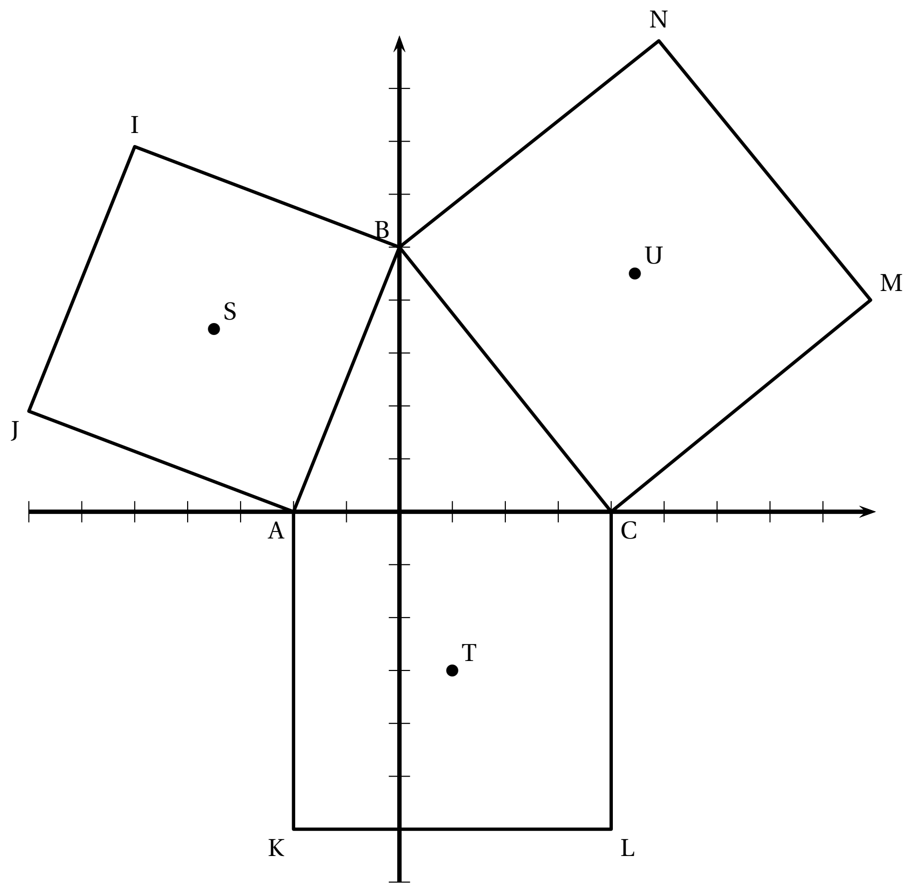
d. En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

e. Déterminer les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Annexe 1 (exercice 1)



Annexe 2 (exercice 2)



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Centres étrangers 16 juin 2011 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$.
Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathcal{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_n A_{n+1}]$.

1. **a.** Placer sur un dessin la droite $\mathcal{D}$, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6.
On prendra 10 cm comme unité graphique.

b. Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
Calculer a_2, a_3, a_4 a_5 et a_6.

c. Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification incomplète sera valorisée.

Question 1

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + \text{i}, \quad b = 3\text{i}, \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + \text{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

Affirmation
Le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Question 2

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, la transformation f dont une écriture complexe est : $z' = \left(\dfrac{2\text{i}}{\sqrt{3} + \text{i}}\right) z$.

Affirmation
La transformation f est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Question 3
On considère le nombre complexe $a = \left(-\sqrt{3}+\text{i}\right)^{2011}$.
Affirmation
Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.

Question 4
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un nombre strictement positif.
On rappelle que, pour tout réel t strictement positif, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$ s'exprime par $P(X \leqslant t) = 1 - \text{e}^{-\lambda t}$.
Affirmation
Sachant que $X \geqslant 2$, la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[2 ; 3]$ est égale à $1 - \text{e}^{-\lambda}$.

Question 5
Une urne contient au total n boules dont cinq sont blanches et les autres noires.
On effectue 10 tirages successifs indépendants en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
Affirmation
La plus petite valeur de l'entier n, pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les 10 tirages est supérieure ou égale à 0,9999, est égale à 13.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute justification complète sera valorisée.

Question 1
On considère l'équation (E) : $2x + 11y = 7$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation
Les seuls couples solutions de (E) sont les couples $(22k-2 ; -4k+1)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

Question 2
On considère l'entier $N = 11^{2011}$.
Affirmation
L'entier N est congru à 4 modulo 7.

Question 3
On considère, dans le plan complexe, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1+\text{i} \quad ; \quad b = 3\text{i} \quad ; \quad c = \left(1-2\sqrt{2}\right)+\text{i}\left(1-\sqrt{2}\right).$$

Affirmation
Le point C est l'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Question 4
On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives :

$$a = 1+\text{i} \quad ; \quad b = 2-\text{i}.$$

Soit f la similitude d'écriture complexe : $z' = \left(-\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\text{i}\right)\overline{z} + \left(\dfrac{12}{5} + \dfrac{6}{5}\text{i}\right)$.
Affirmation
La transformation f est la réflexion d'axe (AB).

Question 5

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

On considère la surface $\mathscr{S}$ dont une équation est : $z = 4xy$.

Affirmation

La section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $z = 0$ est la réunion de deux droites orthogonales.

EXERCICE 3 **5 points**

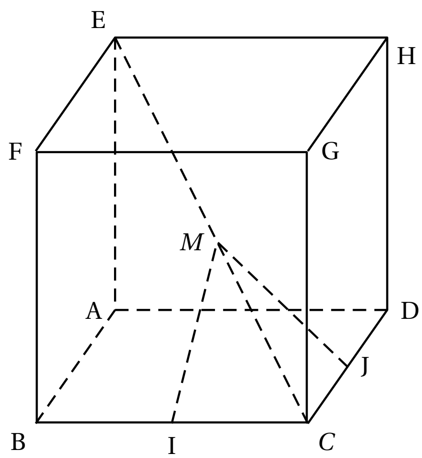
Commun à tous les candidats

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.

On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].

Soit M un point quelconque du segment [CE].

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.



1. **a.** Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
   b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\,;\,1-t\,;\,t)$.
2. **a.** Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].
   b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.
   c. Exprimer $\mathrm{I}M^2$ en fonction de t.
3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$ est maximale.
   On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$.
   a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.
   b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.
   c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :
   $$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$
   d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$ soit maximale.
   e. Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

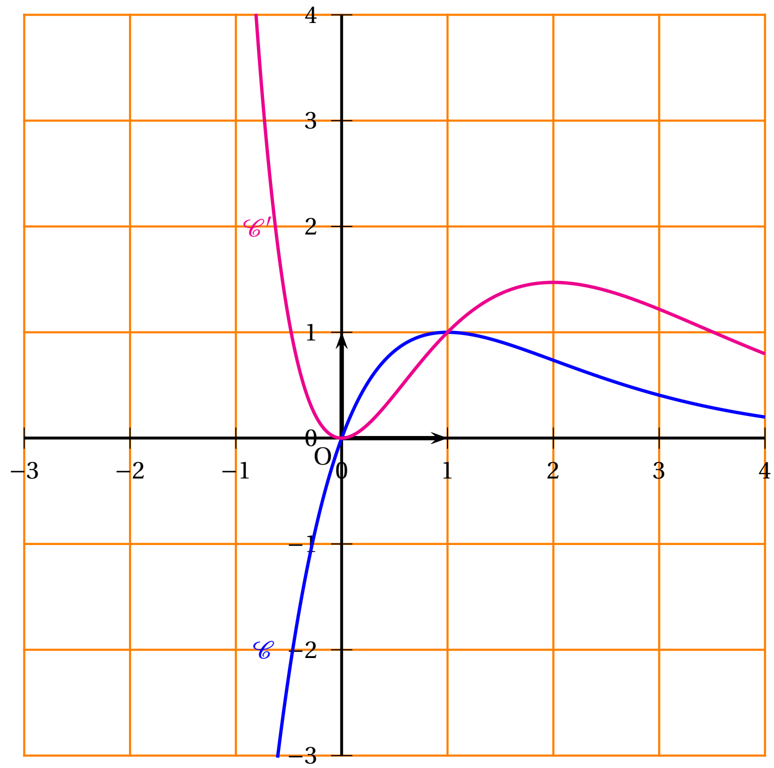
$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ sont respectivement notées $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. leur tracé est donné en annexe.

1. **Étude des fonctions *f* et *g***
   a. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.
   b. Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.
   c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.
2. **Calcul d'intégrales**
   Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :
   $$I_0 = \int_0^1 \text{e}^{1-x}\,\text{d}x \quad \text{et , si } n \geqslant 1,\ I_n = \int_0^1 x^n\text{e}^{1-x}\,\text{d}x.$$
   a. Calculer la valeur exacte de I_0.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :
   $$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$
   c. En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.
3. **Calcul d'une aire plane**
   a. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
   b. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
   En exprimant $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :
   $$\mathscr{A} = 3 - \text{e}.$$
4. **Étude de l'égalité de deux aires**
   Soit a un réel strictement supérieur à 1.
   On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.
   On admet que $S(a)$ s'exprime par :
   $$S(a) = 3 - \text{e}^{1-a}\left(a^2 + a + 1\right).$$
   L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathscr{A}$ et $S(a)$ sont égales.
   a. Démontrer que l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ est équivalente à l'équation :
   $\text{e}^a = a^2 + a + 1$.
   b. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

Annexe

(Courbes de l'exercice 4)



∽ Baccalauréat S La Réunion 22 juin 2011 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ et, par A et B les points de coordonnées respectives $(1 ; 2 ; -4)$ et $(-3 ; 4 ; 1)$.

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -8+2t \\ y & = & 7-t \\ z & = & 6+t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ sont sécants.
- Le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont aucun point en commun.
- La droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
- Aucune des trois affirmations précédentes n'est vraie.

2. On note $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $x+4y-3z+4=0$.

- Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et distincts.
- Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus.
- Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}$.
- Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$.

3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :

- une droite passant par le point C de coordonnées $\left(-1 ; 3 ; -\dfrac{1}{2}\right)$,
- une sphère de rayon $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.
- le plan d'équation $-4x+2y+5z-\dfrac{5}{2}=0$,
- le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{2}=0$.

4. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=5$ est :

- une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5 ; 5 ; \dfrac{7}{2}\right)$,
- une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(5 ; -5 ; -\dfrac{7}{2}\right)$,
- le plan d'équation $-4x+2y+5z-5=0$,
- le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{3}=0$.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les trois questions peuvent être traitées de façon indépendante

Un candidat participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne.
Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question.
Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport.
En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.
On note A l'évènement « les quatre questions portent sur l'histoire » et B l'évènement « l'une au moins des quatre questions porte sur le sport ».
Déterminer la probabilité des évènements A et B.

2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.
Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.
On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est 0,7 s'il s'agit d'une question d'histoire, 0,6 s'il s'agit d'une question de littérature et 0,5 pour une question sur le sport.
On considère les évènements suivants :

H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire »
L : « la question posée au candidat porte sur la littérature »
S : « la question posée au candidat porte sur le sport »
C : « le candidat répond correctement à la question posée »

a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette première épreuve.
b. Calculer la probabilité de l'évènement C.
c. Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?

3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à $0,7$.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.

a. Soit k un entier compris entre 0 et 10.
Quelle est l'expression de la probabilité de l'évènement $\{X = k\}$ en fonction de k ? On justifiera la réponse.
b. Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

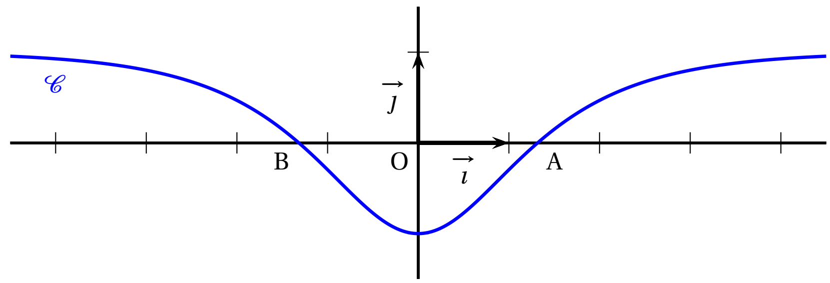
EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathscr{C}$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   - **a.** Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4\text{e}^x\left(\text{e}^{2x}-1\right)}{\left(\text{e}^{2x}+1\right)^2}$.
   - **b.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
   Démontrer que cette conjecture est vraie.
3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = \text{e}^a$.
   - **a.** Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$.
     En déduire la valeur exacte de a.
   - **b.** Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\text{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
2. Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leqslant F(a) \leqslant 0$.
3. On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.
   - **a.** Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geqslant 1 - 4\text{e}^{-t}$.
   - **b.** En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geqslant x - 4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. *Dans cette question. toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
On rappelle que :

* $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
* L'image du point B par la rotation de centre A et d'angle θ est le point C défini par :

$$AC = AB \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq B,\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \theta + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a, b et θ.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$.
Dans la suite de l'exercice, on désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives

$$z_P = \frac{3}{2}(1+\mathrm{i}), \quad z_Q = \frac{3}{2}(1-\mathrm{i}) \quad \text{et} \quad z_R = -2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

2. Placer les points P, Q, R sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de la résolution de l'exercice.

3. On note S le symétrique du point R par rapport au point Q.
Vérifier que l'affixe z_S du point S est $3 + \mathrm{i}\left(2\sqrt{3} - 3\right)$.

4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Déterminer les affixes z_A et z_C des points A et C, images respectives des points R et S par la rotation r.

5. On désigne par B et D les images respectives des points S et R par la translation de vecteur $3\overrightarrow{v}$.
Calculer les affixes z_B et z_D des points B et D.

6. **a.** Démontrer que $\dfrac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = \mathrm{i}$.
b. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives a et b.
On rappelle que :

* $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) + 2n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$.
* L'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $k (k > 0)$ et d'angle θ est le point C défini par :

$$AC = kAB \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq B,\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \theta + 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a, b, θ et k.

Partie B

On considère l'équation (E) : $\quad 3x - 2y = 1$.

1. **a.** Montrer que le couple $(-1 ; -2)$ est une solution de (E).
b. Déterminer tous les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation (E).

2. Soient d et d' les droites d'équations respectives $y = 2x + 4$ et $3x - 2y = 1$.

a. Vérifier que pour tout entier relatif k, le point A_k de coordonnées $(k-3\ ;\ 2k-2)$ appartient à la droite d.

On admettra que ce sont les seuls points de d à coordonnées entières.

b. Montrer que les seuls points de d' à coordonnées entières sont les points $B_{k'}$ de coordonnées $(2k'-1\ ;\ 3k'-2)$ où $k' \in \mathbb{Z}$.

3. **a.** Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que $A_k = B_{k'}$?

b. Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que le segment $[A_kB_{k'}]$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

c. Trouver l'entier q tel que $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}} = 4\overrightarrow{u}$.

4. Soit Ω un point quelconque du plan dont l'affixe est notée ω. On note H le milieu du segment $[A_6B_4]$.

On désigne par f la similitude directe de centre Ω, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

a. Donner l'écriture complexe de la similitude f.

b. Déterminer l'affixe du point Ω pour que l'image du point H soit l'origine O du repère.

Baccalauréat S Métropole 21 juin 2011

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

— La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).

— La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b. En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3. **a.** Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1$, $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}} = -1$, $z_{\mathrm{D}} = -\mathrm{i}$.

1. L'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ a pour affixe :

- $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$,
- $z = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
- $z = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1-\text{i})$,
- $z = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+\text{i})$,

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z+\text{i}| = |z-1|$ est :

- la médiatrice du segment [BC],
- le milieu du segment [BC],
- le cercle de centre O et de rayon 1,
- la médiatrice du segment [AD].

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\dfrac{z+\text{i}}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

- la droite (CD) privée du point C,
- le cercle de diamètre [CD] privé du point C,
- le cercle de diamètre [BD] privé du point C,
- la médiatrice du segment [AB].

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

- le demi-cercle de diamètre [BD] passant par A,
- la droite (BD),
- la demi-droite]BD) d'origine B passant par D privée de B,
- le cercle de diamètre [BD] privé de B et D.

EXERCICE 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

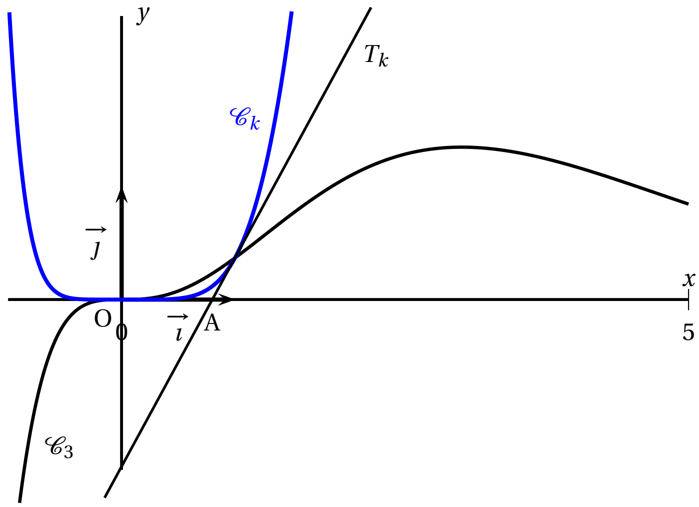
$$f_n(x) = x^n \text{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathcal{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathcal{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}~;~0\right)$.



1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
   c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
2. **a.** Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
   b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
   Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
4. **a.** Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}\ ;\ 0\right)$.
   b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

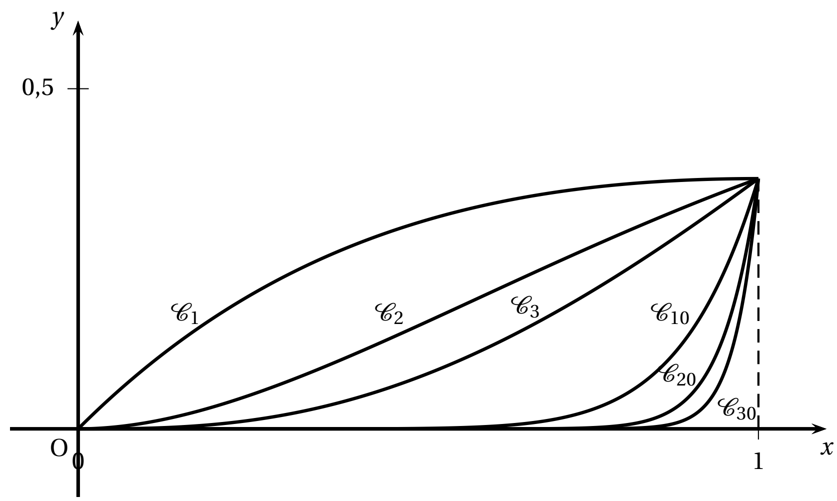
PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (I_n)$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et par M_0 le point de coordonnées $\left(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0\right)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d\left(M_0, \mathscr{P}\right)$ du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d\left(M_0, \mathscr{P}\right) = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

1. Justifier que $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -ax_0-by_0-cz_0-d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4\,;1\,;5)$, $(-3\,;\,2\,;\,0)$, $(1\,;3\,;6)$, $(-7\,;\,0\,;\,4)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x+2y-z-1=0$.

   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.

2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.
   On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathcal{P}$.
   c. Retrouver le résultat de la question 1. b.
3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.
   a. Justifier que le point B appartient à la sphère $\mathcal{S}$.
   b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle $\mathcal{C}$, intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.
Théorème de BÉZOUT :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.
2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
   Déduire du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que
   $a \equiv 0 \quad [p]$ et $a \equiv 0 \quad [q]$, alors $a \equiv 0 \quad [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{ccll} n & \equiv & 9 & [17] \\ n & \equiv & 3 & [5] \end{array}\right.$$

1. Recherche d'un élément de $\mathcal{S}$.
   On désigne par $(u\ ;\ v)$ un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
   a. Justifier l'existence d'un tel couple $(u\ ;\ v)$.
   b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
   Démontrer que n_0 appartient à $\mathcal{S}$.
   c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathcal{S}$.
2. Caractérisation des éléments de $\mathcal{S}$.
   a. Soit n un entier relatif appartenant à $\mathcal{S}$.
   Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \quad [85]$.
   b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.
3. Application
   Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.
   Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
   Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
   Combien a-t-elle de jetons ?

∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∾ septembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln x - 1.$$

Partie A : Étude d'une fonction

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0~;~+\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.
4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0~;~+\infty[$.
5. Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

On donne en annexe la courbe $\mathscr{C}$, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\alpha}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale

$$J = \int_{\alpha}^{4} x\ln x\,\mathrm{d}x.$$

3. Montrer l'égalité : $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.
   En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives :
$\mathrm{A}(-1~;~2~;~1)$, $\mathrm{B}(1~;~-6~;~-1)$ et $\mathrm{C}(2~;2~;2)$.

1. **a.** Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.

a. Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

b. Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1+\ t \\ y &=& -3+2t \\ z &=& t \end{array}\right. ,\quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que le point I appartient à la droite D.

b. Montrer que le point I appartient à la sphère S.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère l'ensemble P des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace tels que :

$$z = x^2 + y^2.$$

Les trois questions sont indépendantes.

1. a. Montrer que l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation $z = 5$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Déterminer la nature de l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation $y = 1$.

2. On considère la sphère S de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.

a. Donner une équation de la sphère S.

b. Montrer que l'intersection de la sphère S et de l'ensemble P est un cercle.

3. Le but de cette question est de déterminer les points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'ensemble P, dont les coordonnées sont des entiers relatifs, appartenant au plan d'équation $-3x + 2y = 1$ et vérifiant $z \leqslant 25$.

a. Donner un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) : $-3x + 2y = 1$.

b. Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Déterminer les points de l'ensemble P dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont des entiers relatifs vérifiant :

$$-3x + 2y = 1 \quad \text{et} \quad z \leqslant 25.$$

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. **a.** Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.
   b. Faire une figure et construire les points P et Q.
2. **a.** Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.
   b. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
On suppose que l'origine O du repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. **a.** Montrer que $|a| = |b| = |c|$. En déduire que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{c}{a}\right| = 1$.
   b. Montrer que $a+b+c = 0$.
   c. Montrer que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{b}{a}+1\right| = 1$.
   d. En utilisant la partie A, en déduire que $\dfrac{b}{a} = p$ ou $\dfrac{b}{a} = q$.
2. Dans cette question, on admet que $\dfrac{b}{a} = p$ et $\dfrac{c}{a} = q$.
   a. Montrer que $\dfrac{q-1}{p-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   b. Montrer que $\dfrac{q-1}{p-1} = \dfrac{c-a}{b-a}$.
   c. Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

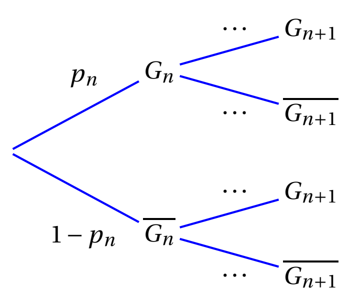
Un site internet propose des jeux en ligne.
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\dfrac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.
   a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
   b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
   c. Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

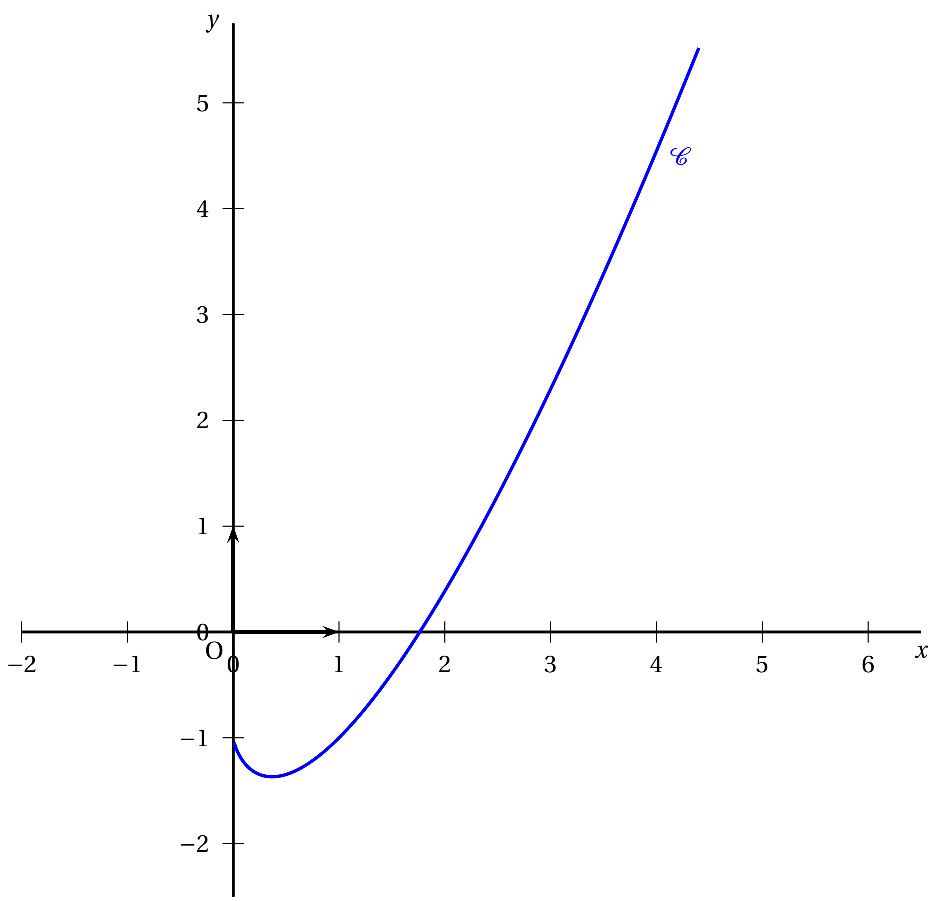
1. a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
   c. Déterminer l'espérance de X.
2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
   a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
   b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €. Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

ANNEXE

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

Exercice 1



Baccalauréat S Métropole–La Réunion
16 septembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.
Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.
On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout réel positif t, $p(Y \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Exprimer $p(Y \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}128$.
2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?
4. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces moteurs est égale à $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$ où F est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.
   a. Calculer $F(t)$ en fonction de t.
   b. En déduire la valeur de d_m. On arrondira à 10^{-1}.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A - Étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 4\ln x.$$

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

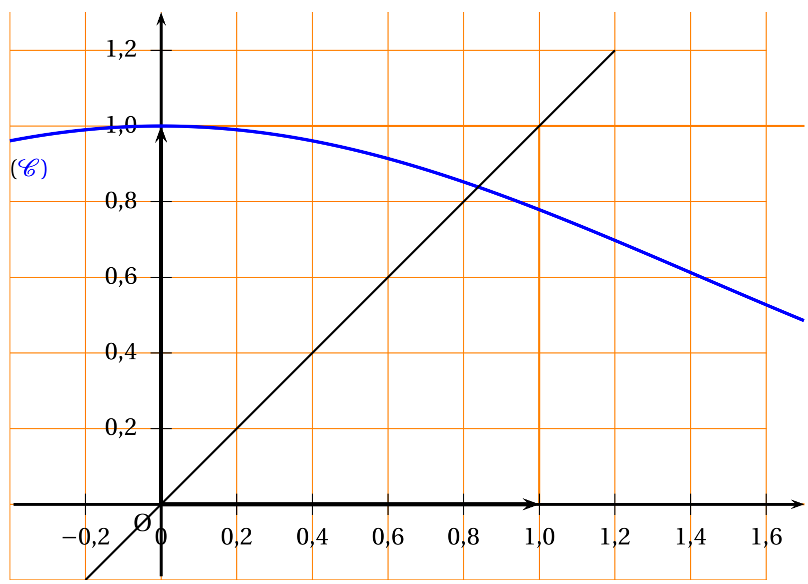
Sur le graphique fourni ci-dessous, on a tracé une partie de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & g\left(u_n\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

1. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.
2. Au moyen de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?
3. On admet que pour tout entier naturel n, $\quad u_{2n} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}$.
   En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques.
   En déduire que $0,838$ est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.



Partie C - Un problème de distance

On appelle (Γ) la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 2\ln x.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe (Γ), il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres.

1. Soient M un point de la courbe (Γ) et x son abscisse. Exprimer OM en fonction de x.
2. **a.** Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2.$$

   Étudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie A.

   b. En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ), distinct de A, on ait O$M >$ OA.
3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente $\mathrm{T_A}$ à la courbe (Γ) au point A.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par a, b, c, d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul. On appelle P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ où A et B sont deux points quelconques du plan P.

Partie B - Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification de ce choix.
Il est attribué 1 *point si la réponse est exacte et justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

On désigne par P le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z = 0$ et par A et B les deux points du plan P de coordonnées respectives $(1\,;\,2\,;\,0)$ et $(0\,;\,3\,;\,1)$.

1. Soient C, D, E les points de coordonnées respectives $(1\,;\,1\,;\,-1)$, $(-1\,;\,4\,;\,2)$, $(1\,;\,5\,;\,1)$.
   a. Les points A, B, C définissent le plan P.
   b. Les points A, B, D définissent le plan P.
   c. Les points A, B, E définissent le plan P.
2. La droite D est définie par la représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{l c l}x &=& 1-t\\ y &=& t, \qquad t \in \mathbb{R}.\\ z &=& 2+t\end{array}\right.$$
   a. La droite D est perpendiculaire au plan P.
   b. La droite D est strictement parallèle au plan P.
   c. La droite D est incluse dans le plan P.
3. Soit S la sphère de centre Ω, de coordonnées $(2\,;\,5\,;\,1)$, et de rayon $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble des points communs à la sphère S et au plan P est :
   a. vide,
   b. constitué d'un seul point,
   c. un cercle.

EXERCICE 4 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A le point d'affixe i et par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z - \mathrm{i}}{\overline{z} + \mathrm{i}}.$$

1. Calculer l'affixe du point B′, image du point B d'affixe $2 - \mathrm{i}$ par l'application f.
   Placer les points B et B′ sur une figure que l'on fera sur la copie.
2. Démontrer que l'application f n'admet pas de point invariant. On rappelle qu'un point invariant est un point confondu avec son image.
3. **a.** Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $\overline{z - \mathrm{i}} = \overline{z} + \mathrm{i}$.
   b. Démontrer que $\mathrm{O}M' = 1$ et interpréter géométriquement ce résultat.
   c. Démontrer que pour tout point M distinct de A,
   $$\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = 2\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + 2k\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$
   d. En déduire une méthode de construction de l'image M' d'un point quelconque M distinct de A.
4. Soit (d) la droite passant par le point A et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   a. Dessiner la droite (d).
   b. Déterminer l'image par l'application f de la droite (d) privée du point A.

EXERCICE 4 **5 points**
Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A et B les points de coordonnées respectives $(1\ ;\ 0)$ et $(6\ ;\ 1)$.
Pour tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on note M' l'image du point M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ ses coordonnées.

1. **a.** Justifier l'existence de deux nombres complexes a et b tels que, pour tout point M d'affixe z, l'affixe z' du point M' est donnée par
   $$z' = a\overline{z} + b.$$
   b. En utilisant les points A et B, démontrer que $\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a + b \\ 6 + \mathrm{i} & = & a(6 - \mathrm{i}) + b \end{array}\right.$
   c. En déduire que, pour tout nombre complexe z :
   $$z' = \frac{1}{13}(12 + 5\mathrm{i})\overline{z} + \frac{1}{13}(1 - 5\mathrm{i}).$$
   d. Établir que, pour tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ du point M' sont telles que :
   $$x' = \frac{1}{13}(12x + 5y + 1) \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{13}(5x - 12y - 5).$$

2. On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont des entiers relatifs et tels que le point M' associé appartienne à l'axe des abscisses.

a. Justifier que $M(x\ ;\ y)$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $5(x-1) = 12y$.

b. En déduire que $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(1+12k\ ;\ 5k)$ où k est un entier relatif.

3. Dans cette question, on suppose que les coordonnées de M sont des entiers relatifs et que l'abscisse de M' est un entier relatif.

a. Démontrer que $x \equiv 5y+1 \quad [13]$.

b. En déduire que $5x-12y-5 \equiv 0 \quad [13]$ et que l'ordonnée de M' est un entier relatif.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer les points M de la droite d'équation $x = 2$ tels que les coordonnées du point M' soient des entiers relatifs.

On pourra montrer que l'ordonnée y d'un tel point est un entier relatif et utiliser des congruences modulo 13.

∽ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ septembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1er niveau, 75 vont au 2e niveau et 100 vont au 3e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

— N_1 : « La personne va au premier niveau. »

— N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »

— N_3 : « La personne va au troisième niveau. »

— E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Montrer que la probabilité que la personne aille au 2e niveau par l'escalier est égale à $\dfrac{1}{12}$.

b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2e niveau.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2e niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2e niveau.

c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2e niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2e niveau » soit supérieure ou égale à $0,99$.

EXERCICE 2 **4 points**

Partie A

On rappelle que pour tous les points E et F de l'espace, $\text{EF}^2 = \overrightarrow{\text{EF}}^2 = \overrightarrow{\text{EF}} \cdot \overrightarrow{\text{EF}}$.
Soient A et B deux points distincts de l'espace et I le milieu de [AB].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, on a :

$$M\text{A}^2 + M\text{B}^2 = 2M\text{I}^2 + \frac{1}{2}\text{AB}^2.$$

2. Déterminer la nature de l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que

$$M\text{A}^2 + M\text{B}^2 = \text{AB}^2.$$

Partie B

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives : $3x + 4y + z - 1 = 0$ et
$x - 2y - z + 5 = 0$ et les points A et B de coordonnées respectives $(-1\,;\ 0\,;\ 4)$ et $(3\,;\ -4\,;\ 2)$.

1. Montrer que les plans (P) et (Q) sont sécants.
   On nomme (Δ) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).
   a. Montrer que le point A appartient à la droite (Δ).
   b. Montrer que $\vec{u}\,(1\,;\ -2\,;\ 5)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).
   c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ).
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit (E) l'ensemble des points M de l'espace tels que $M\text{A}^2 + M\text{B}^2 = \text{AB}^2$.
   Déterminer l'ensemble des points d'intersection de (E) et de la droite (Δ). On précisera les coordonnées de ces points.

EXERCICE 3 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_\text{A} = 2 - 3\text{i}$, $z_\text{B} = \text{i}$ et $z_\text{C} = 6 - \text{i}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\dfrac{z_\text{B} - z_\text{A}}{z_\text{C} - z_\text{A}}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\text{i}(z - 2 + 3\text{i})}{z - \text{i}}$$

1. Soit D le point d'affixe $z_\text{D} = 1 - \text{i}$. Déterminer l'affixe du point D′ image du point D par f.
2. **a.** Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe 2i.
   b. Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $\text{O}M' = \dfrac{\text{A}M}{\text{B}M}$.

4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{B}M},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que les fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;\,b]$ de I.

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

On note respectivement $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes représentatives de f de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
Les courbes sont tracées en annexe.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des points communs à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
b. Donner les positions relatives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** À l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
b. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}.$$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

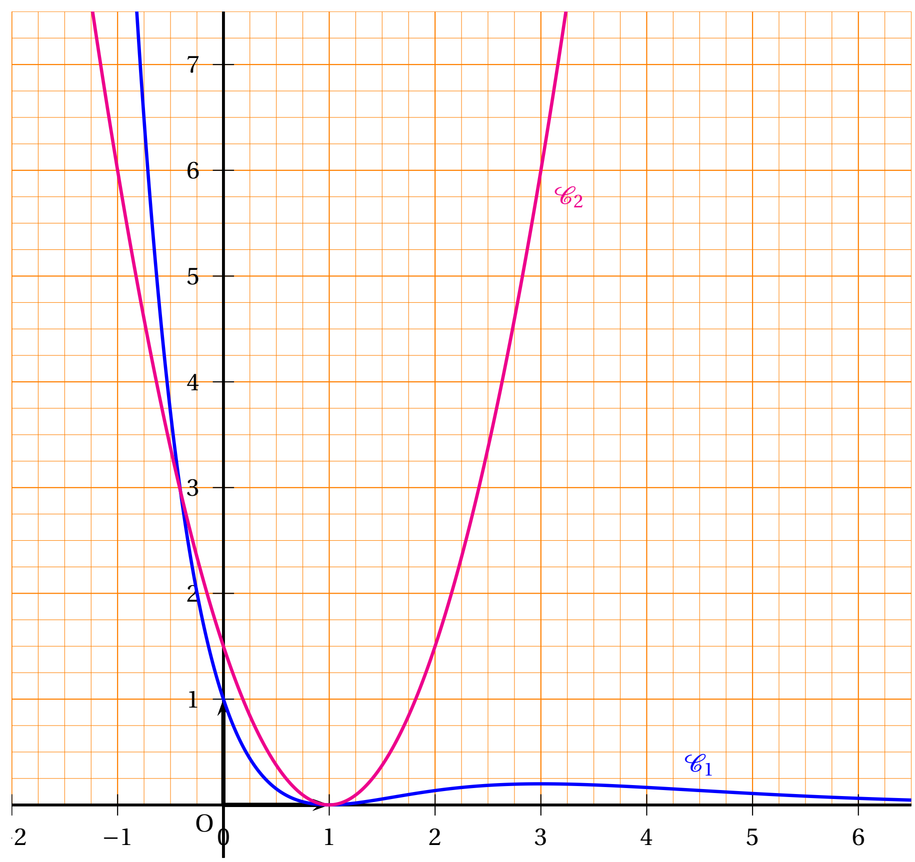
$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

EXERCICE 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∾ 10 novembre 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1 + \text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = \overline{z_{\text{A}}} \quad ; \quad z_{\text{C}} = 2z_{\text{B}} \quad ; \quad z_{\text{D}} = 3.$$

Construire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.

3. Montrer que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.
4. Calculer $\dfrac{z_{\text{C}} - 3}{z_{\text{A}} - 3}$. En déduire la nature du triangle DAC.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On note h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On note r la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On appelle C$'$ l'image de C par h et C$''$ l'image de C$'$ par r.
Montrer que les droites (AC) et (C$'$C$''$) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x.$$

   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0~;~+\infty[$.
   c. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0~;~+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2. Soit g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = g\left(u_n\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right)$.
On a représenté en **annexe 1 (à rendre avec la copie)** la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.

   a. Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b. Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?
On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON.
Aucune justification n'est demandée.

- Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
- Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. »
- Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

c. On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.
Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{\ell}\right) = \ell$.

d. Montrer que $\ell = \alpha$.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à $0,6$.
Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près .

2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à $0,52$.
3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.
4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
   a. Quelle est la loi suivie par Y?
   b. Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures
   c. Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère les points : $\mathrm{A}(0~;0~;2)$, $\mathrm{B}(0~;4~;0)$ et $\mathrm{C}(2~;0~;0)$.

1. **a.** Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x + y + 2z = 4$.
   b. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

2. **a.** Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal à la droite (BC).
   b. Soit Δ la droite intersection du plan P et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ. Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC ?
3. **a.** Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.
   Montrer qu'une équation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & t \\ y & = & 4-4t, \\ z & = & t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.
4. Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ'. Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{8}{9}\,;\,\dfrac{4}{9}\,;\,\dfrac{8}{9}\right)$.
   Que représente le point H pour le triangle ABC ?
5. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). Retrouver alors la distance du point O au plan (ABC).

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

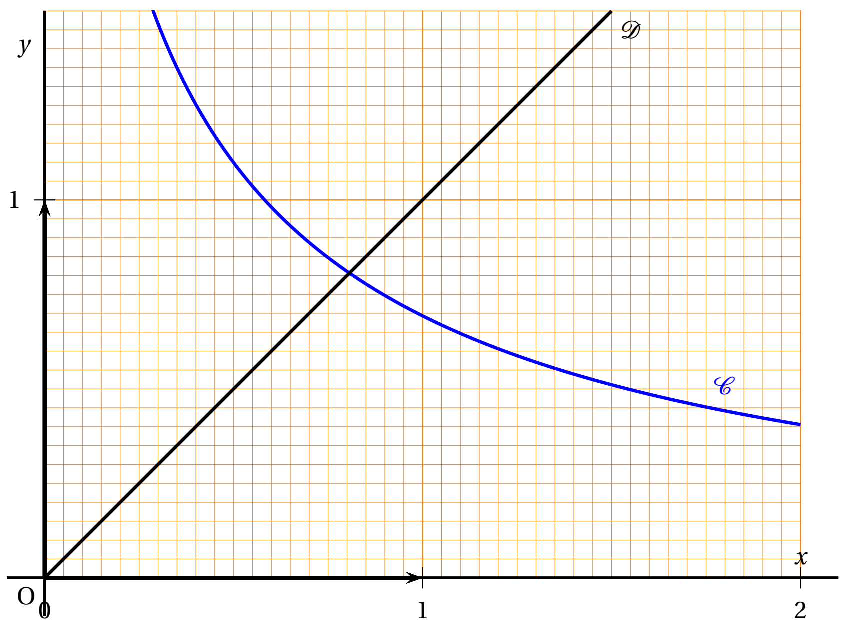
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère la surface S d'équation : $x^2+y^2-z^2=4$.

1. **a.** Montrer que si le point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à S alors le point $M'(-x\,;\,-y\,;\,-z)$ appartient aussi à S. Que peut-on en déduire ?
   b. Montrer que la surface S est symétrique par rapport au plan $(x\mathrm{O}y)$. On admet de même que la surface S est symétrique par rapport aux plans $(x\mathrm{O}z)$ et $(y\mathrm{O}z)$.
2. **a.** Déterminer la nature géométrique de la section de la surface S par le plan $(x\mathrm{O}y)$.
   Préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Soit k un réel non nul. Déterminer la nature géométrique de la section de la surface S par le plan d'équation $z=k$. Préciser ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer la nature géométrique de la section de la surface S par le plan d'équation $y=2$.
4. On considère les points $\mathrm{A}\left(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,2\right)$ et $\mathrm{B}\left(0\,;\,2\sqrt{2}\,;\,-2\right)$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b. La droite (AB) est-elle contenue dans la surface S ?
5. Identifier parmi les trois figures proposées en **annexe 2** celle qui représente la surface S.
   Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la figure et justifiera la réponse.
6. Soit H la section de la surface S par le plan P d'équation $y=5$.
   a. Montrer qu'un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à H si et seulement si $(x-z)(x+z)=-21$ et $y=5$.
   b. En déduire les coordonnées des points de H dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

ANNEXE 1

Commun à tous les candidats

(À rendre avec la copie)
Exercice 2



ANNEXE 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercice 5

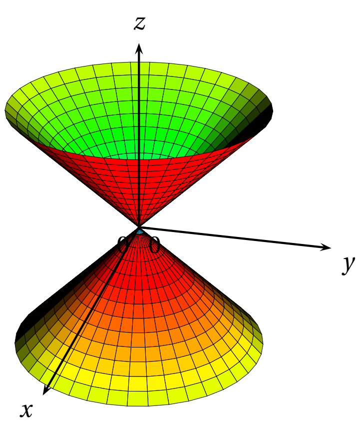


Figure 1

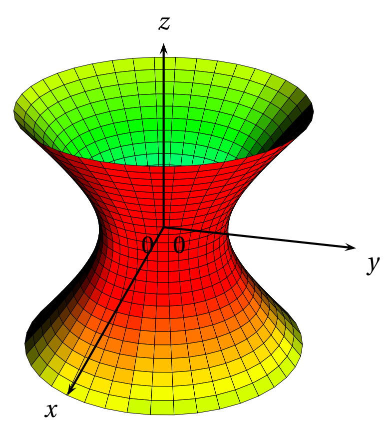


Figure 2

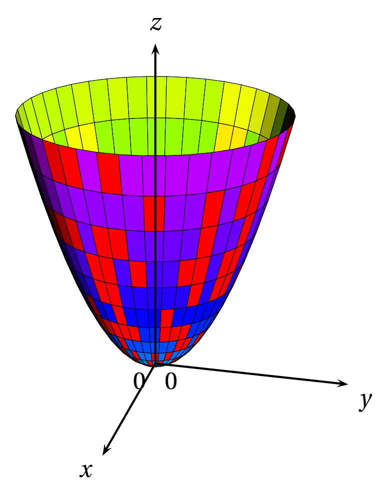


Figure 3

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud 16 novembre 2011

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}.$$

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. On a tracé, en annexe 1, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
   a. Sur le graphique en annexe 1, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.
   b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b.
   a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

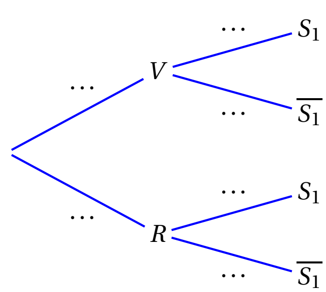
Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.
On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

— V l'évènement : « le dé tiré est vert »

— R l'évènement : « le dé tiré est rouge »

— S_1 l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.
   a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



b. Calculer la probabilité $P(S_1)$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

a. Démontrer que :

$$P(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.

Démontrer que :

$$p_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

c. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geqslant 0,999$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2(1 - \ln x).$$

Partie A Étude de la fonction g

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Déterminer la limite de g en 0.
3. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. En utilisant les résultats précédents, étudier le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B Représentation graphique et aire sous la courbe

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g.

1. Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal ayant pour unité graphique 5 cm et donné en annexe 2.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. La tracer sur le graphique.
3. Calculer l'aire en unités d'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \text{e}$.

Exercice 4 — 3 points

Commun à tous les candidats

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_\text{A}, z_\text{B}, z_\text{C}$ et z_D où :

$$z_\text{A} = 1 + 2\text{i}, \quad z_\text{B} = \overline{z_\text{A}}, \quad z_\text{C} = 1 + \sqrt{3} + \text{i}, \quad z_\text{D} = \overline{z_\text{C}}.$$

a. Placer les points A et B dans le repère $\left(\text{O} ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

b. Calculer $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{A}} - z_{\text{C}}}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

c. En déduire la nature du triangle ABC.

3. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon.

4. Construire les points C et D dans le repère $\left(\text{O} ;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. Expliquer la construction proposée.

Exercice 5 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(-1 ;\ -1 ;\ 1)$ et les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t-1\\ y & = & -3t+2\\ z & = & t\end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{D}'\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3t'\\ y & = & t'+2\\ z & = & 3t'-2\end{array}\right. \text{ où } t' \in \mathbb{R}$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite $\mathcal{D}$ ».
Proposition 2 : « Le plan perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ passant par le point O a pour équation : $2x - 3y + z = 0$ ».
Proposition 3 : « Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales ».
Proposition 4 : « Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires ».
Proposition 5 : « La distance du point A au plan d'équation $2x - 3y + z = 0$ est $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

Exercice 5 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- **Proposition 1 :** « Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2 ».

- Soit a et b deux nombres entiers relatifs non nuls.
  Proposition 2 : « S'il existe un couple de nombres entiers relatifs $(u,\ v)$ tel que $ua + vb = 3$, alors $\text{PGCD}(a,\ b) = 3$ ».

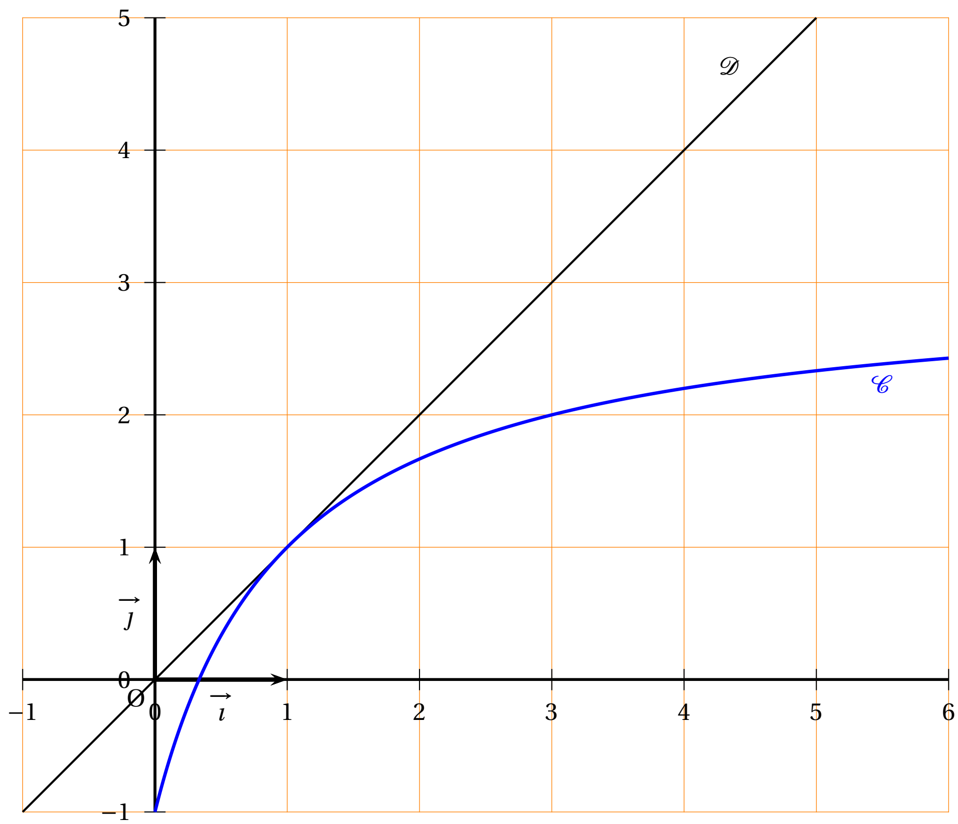
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.
  Proposition 3 : « L'entier $n^2 - 3n - 10$ n'est jamais un nombre premier ».
  L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

- On considère le cône Γ d'équation $x^2 + y^2 = 5z^2$.
  Soit A le point de coordonnées $(-2\,;\,-1\,;\,\gamma)$.
  Proposition 4 : « Il existe un unique réel γ tel que le point A appartient au cône Γ ».

- On coupe le cône Γ d'équation $x^2 + y^2 = 5z^2$ par le plan $\mathscr{P}_a$ d'équation $x = a$ où $a \in \mathbb{R}$.
  Proposition 5 : « Cette intersection peut être la réunion de deux droites ».

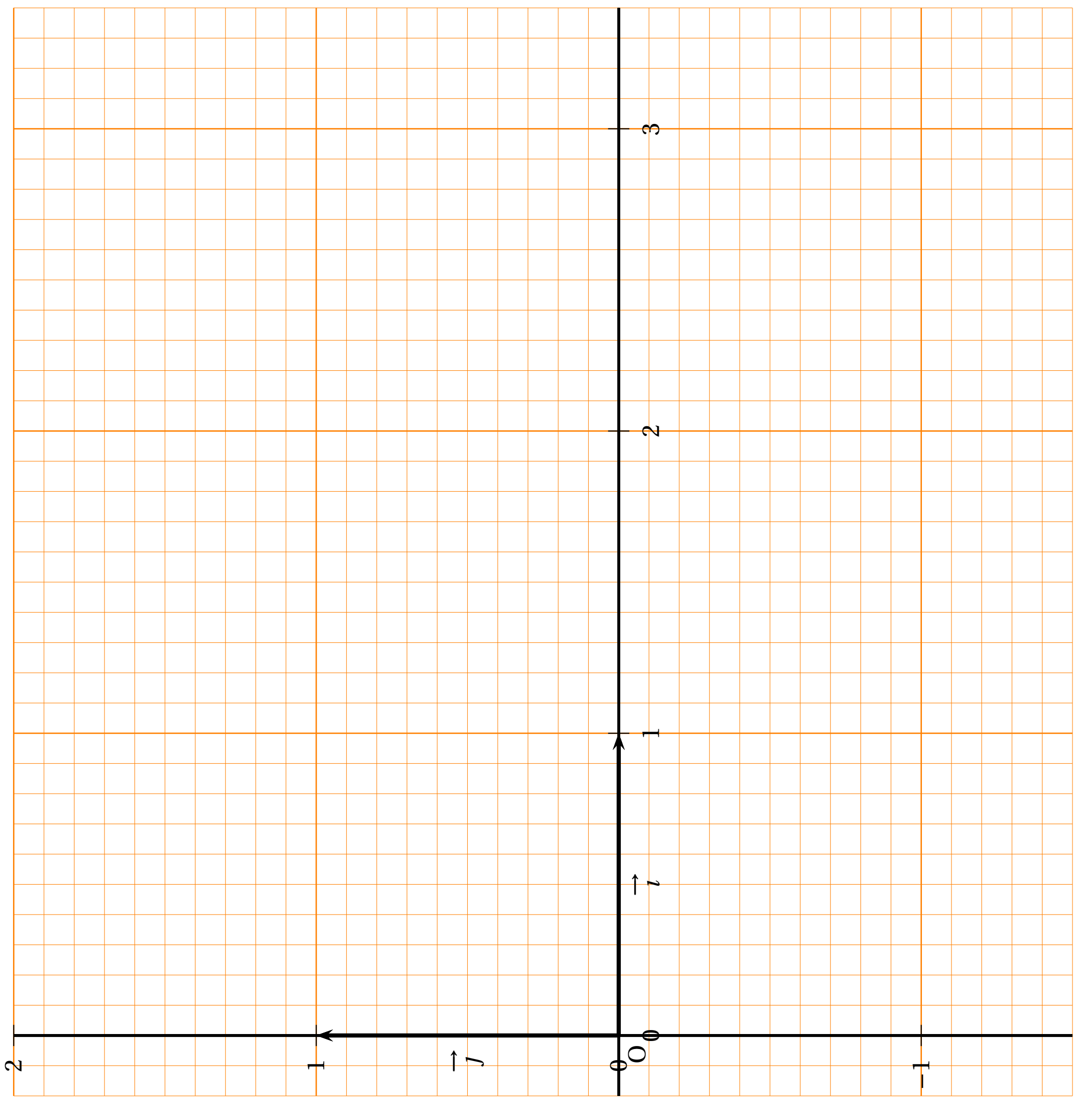
ANNEXE 1

(À rendre avec la copie)



ANNEXE 2

À rendre avec la copie



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie obligatoire mars 2012

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et } z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
4. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = -1 + \mathrm{i}$. On considère!a rotation r de centre O qui transforme J en D.

   a. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.

   b. Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.
5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. **a.** Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

   b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.

   c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».

À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

VRAI ou FAUX ?

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. Énoncé 1 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels.
Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

Proposition 1 *: « On peut choisir la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\frac{\sqrt{2}}{2}$. »

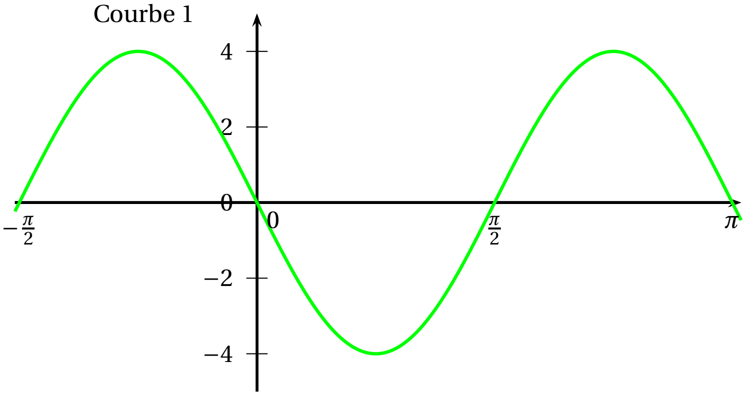
2. Énoncé 2 : Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = \mathrm{e}^{\frac{2in\pi}{3}}$.

Proposition 2 *: « Les points* O, M_1 *et* M_{20} *sont alignés. »*

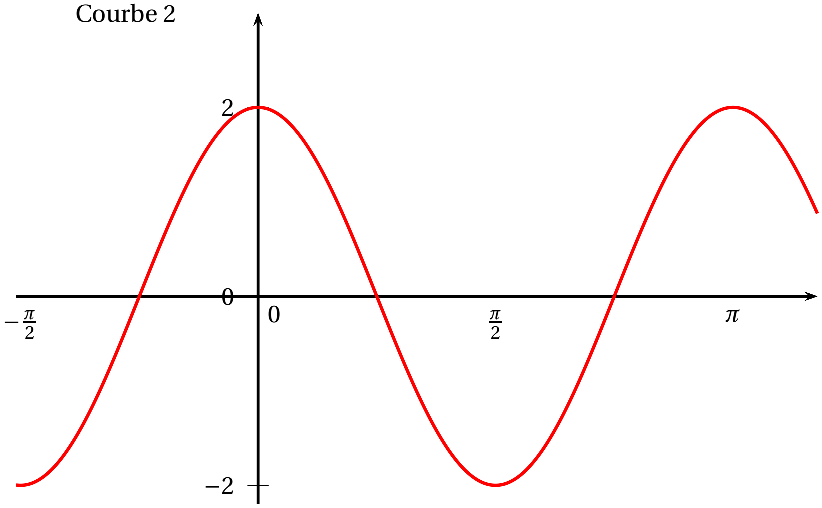
3. Énoncé 3 : On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

Proposition 3 *: « La courbe* 3 *ci-dessous est la représentation graphique de* f ».

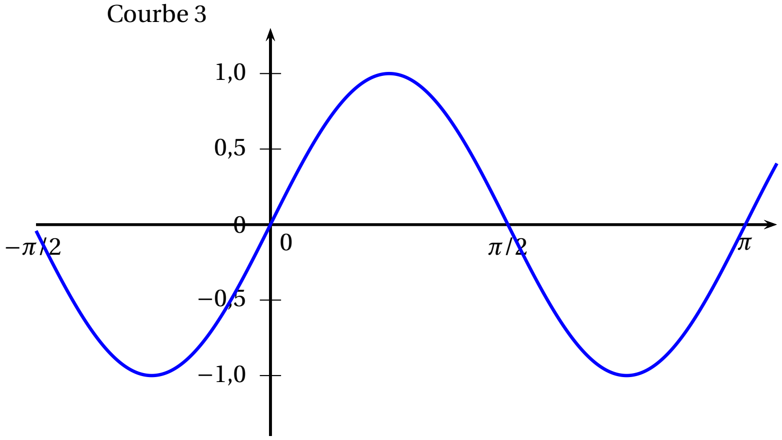
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



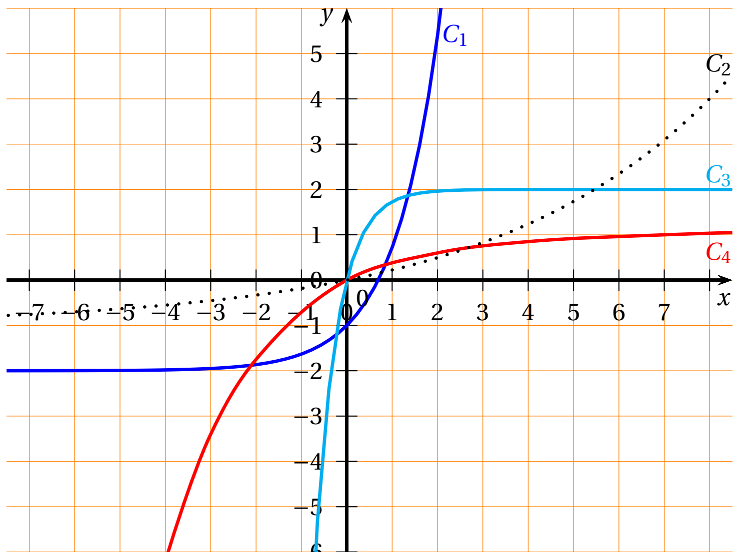
4. **Énoncé 4 :** On considère, dans un repère orthonormé de l'espace, le point A$(0\,;\,0\,;\,3)$ et le plan P d'équation $2x - y + z = 0$.

   Proposition 4 : *« La sphère de centre* A *et de rayon* 2 *et le plan* P *sont sécants. »*

5. **Énoncé 5 :** On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution de (E) vérifiant

   $y(0) = 0$.

   Proposition 5 : « La courbe représentative de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ *est la courbe* C_4*. »*



EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x\text{e}^x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.

Sur la courbe $\mathscr{C}$, tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$. On a placé les points A$'(a ; 0)$ et B$'(1 ; 0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\text{e}^x\,\text{d}x = 1$.
2. **a.** Donner l'aire du triangle OAA$'$ et montrer que l'aire du trapèze ABB$'$A$'$ est égale à $\dfrac{1}{2}\left(-a^2\text{e}^a + a\text{e}^a - a\text{e} + \text{e}\right)$.

   b. En déduire que l' aire de la partie du plan hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}\left(a\text{e}^a - a\text{e} + \text{e} - 2\right)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x\left(\text{e}^x - \text{e}\right) + \text{e} - 2.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$.
   Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0 ; +\infty[$ par
   $g''(x) = (2 + x)\text{e}^x$.
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0 ; +\infty[$.
3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.

Annexe

CETTE PAGE N'EST PAS À RENDRE AVEC LA COPIE