Baccalauréat S 2005

L'intégrale de mars à novembre 2005

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

ᔕ Baccalauréat S Pondichéry 31 mars 2005 ᔓ

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f, définie sur $[1~;~+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

1. **a.** Justifier la continuité de f sur $[1~;~+\infty[$.

   b. Montrer que f est croissante sur $[1~;~+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

   Pour tout réel x_0 de $[1~;~+\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1~;~+\infty[$ est une primitive de f.

   a. Que vaut $\mathscr{A}(1)$?

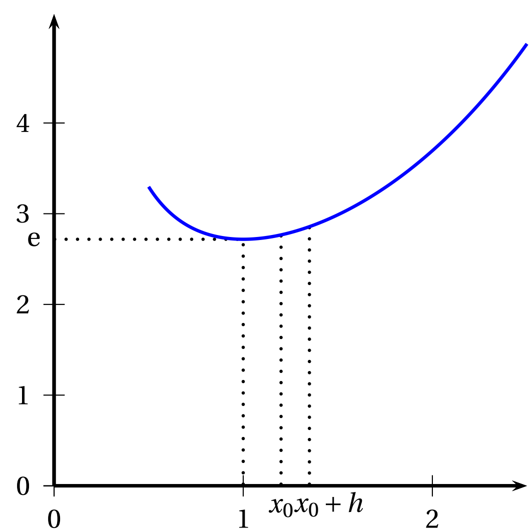
   b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1~;~+\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

   c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?

   d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$.

   e. Conclure.



Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On désigne par I le point d'affixe $z_{\text{I}} = 1$, par A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1 - 2\text{i}$, par B le point d'affixe $-2 + 2\text{i}$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].
On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.
2. Soit D le point d'affixe $z_{\text{D}} = \dfrac{3+9\text{i}}{4+2\text{i}}$.
   Écrire z_{D} sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.
3. Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_{E}, tel qu'une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{\Omega\text{I}}, \overrightarrow{\Omega\text{E}}\right)$ est $\dfrac{\pi}{4}$.
   a. Préciser le module et un argument de $z_{\text{E}} + \dfrac{1}{2}$.
   b. En déduire que $z_{\text{E}} = \dfrac{5\sqrt{2}-2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\text{i}$.
4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

   a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.
   b. Soit K le point d'affixe $z_{\text{K}} = 2$.
   Déterminer par le calcul l'image de K par r. Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4\text{i}}{5}\overline{z} + \frac{1-2\text{i}}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Démontrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' &=& \dfrac{4x-3y-2}{5}\end{array}\right.$
2. **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b. Quelle est la nature de l'application f ?
3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$.

5. On considère les points M d'affixe $z=x+\text{i}y$ tels que $x=1$ et $y\in\mathbb{Z}$. Le point $M'=f(M)$ a pour affixe z'.

Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\,;0\,;2)$, $(1\,;1\,;4)$ et $(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 4\ ;\ -2)$.

Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x+y+2z+1=0$ et $x-2y+6z=0$.

a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t.

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t.

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{I}G}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{IC}}$.

b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment [IC] privé du point C.

Pour quelle valeur de t, le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=\dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1}\leqslant 0,95u_n \quad \text{si et seulement si} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}.$$

a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16} u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

∽ Baccalauréat S Amérique du Nord 1$^{\text{er}}$ juin 2005 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\text{i},\ -3-\text{i}$ et $2,08+1,98\text{i}$.

Le triangle ABC est :

a. : isocèle et non rectangle	**b.** : rectangle et non isocèle
c. : rectangle et isocèle	**d.** : ni rectangle ni isocèle

2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\text{i}}{z+2}$.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

a. : un cercle de rayon 1	**b.** : une droite
c. : une droite privée d'un point	**d.** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

a. : un cercle	**b.** : une droite
c. : une droite privée d'un point	**d.** : un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

a. : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$	**b.** : $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$
c. : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$	**d.** $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$

EXERCICE 2 **6 points**

Le graphique de l'annexe sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\ ;\ 2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

$v_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} = f(v_n)$.

a. Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
Pour tout entier naturel $n,\ 1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
Pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} \leqslant v_n$.
On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
Pour tout entier naturel $n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Pour tout entier naturel $n,\ u_n \leqslant u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.
En déduire que pour tout entier naturel $n,\ v_n - u_n \geqslant 0$ et
$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
Déterminer la valeur exacte de α.

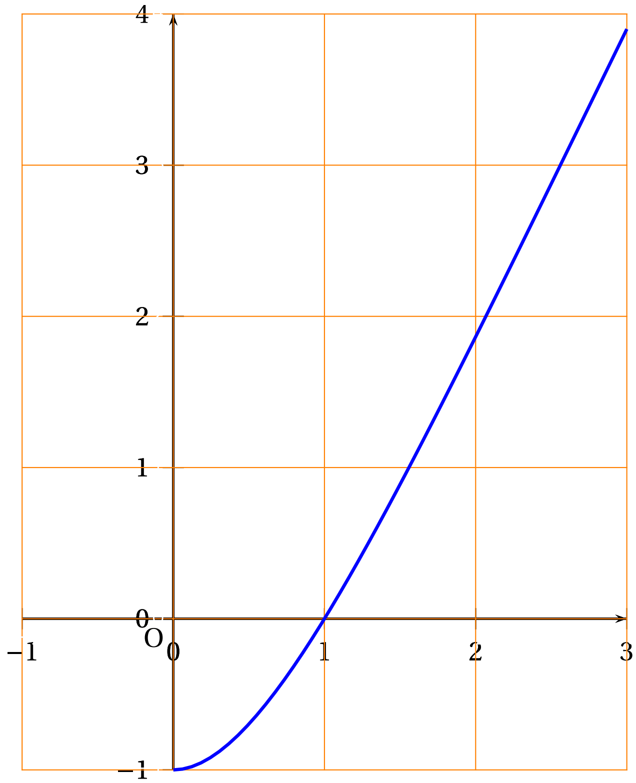
EXERCICE 3 — 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\left(2 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.
   c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.
4. **a.** Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.
   b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



EXERCICE 4 **5 points**

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 » D_2 : « le dé indique 2 »

D_3 : « le dé indique 3 » G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. **a.** Déterminer les probabilités $p_{D_1}(\text{G})$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$

b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement de spécialité

La figure jointe en annexe sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie. On y laissera apparents les traits de construction.

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que AB = 2, AC = $1+\sqrt{5}$ et $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. a. *Démonstration de cours* : démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.

b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2. On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AB] et à la droite (BC). Construire le point Ω.

3. On note D l'image du point C par la similitude S.

a. Démontrer l'alignement des points A, Ω et D ainsi que le parallélisme des droites (CD) et (AB). Construire le point D.

b. Montrer que CD = $3+\sqrt{5}$.

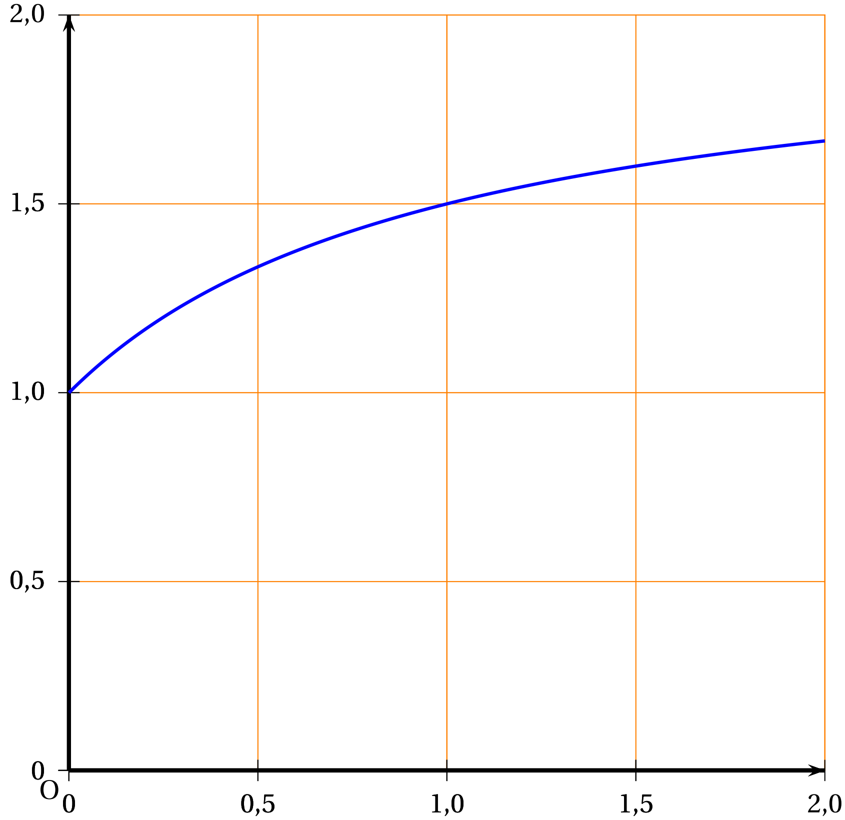
4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

a. Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.

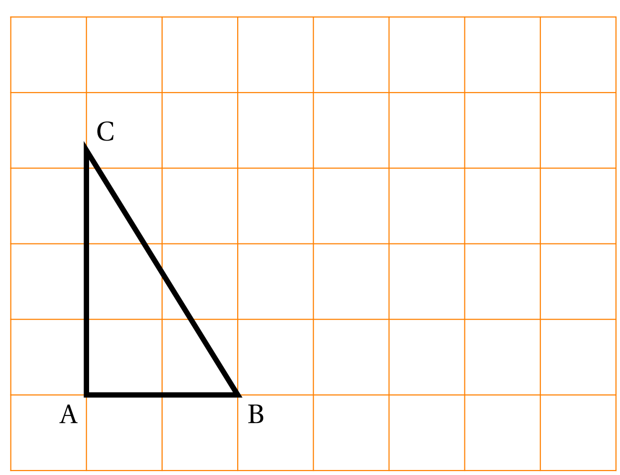
b. Quelle est la nature du quadrilatère BFDE ?

Cette page sera remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Annexe : exercice 2



Annexe : exercice de spécialité



Baccalauréat S Antilles – Guyane juin 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathcal{P}$.

Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.

Soit F l'application de $\mathcal{P}$ privé de O dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

   b. On note $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathcal{C}_1$ par l'application F.

2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F.

   Calculer l'affixe de K'.

   b. Soit $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathcal{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$. R appartient au cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

   a. Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$.

   En déduire que : $\left|z' + 1\right| = \left|z'\right|$.

   b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

   b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

   $(10)^n \equiv 1\ (9)$.

   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.

   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$.

   c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :

   — B la somme des chiffres de A ;

   — C la somme des chiffres de B ;

   — D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ (9)$.

b. Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72180$.

c. Démontrer que $C \leqslant 45$.

d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

e. Démontrer que $D = 7$.

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;\,1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. **a.** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

b. Déduire en utilisant **1.**, que :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \quad (1)$$

$$\text{puis que} \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$U(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Démontrer que U est décroissante (on pourra utiliser **2. b.**)

4. On désigne par V la suite de terme général :

$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

EXERCICE 3 — 3 points

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :
   a. 0,4 **b.** 0,75 **c.** $\dfrac{1}{150}$
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :
   a. 0,3 **b.** 0,8 **c.** 0,4
3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est
   a. 1,15 **b.** 0,4 **c.** 0,3
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
   a. 0,9 **b.** 0,7 **c.** 0,475
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :
   a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** 0,3
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :
   a. $1-(0,25)^{20}$ **b.** $20\times 0,75$ **c.** $0,75\times(0,25)^{20}$

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

A. Soit [KL] un segment de l'espace ; on note I son milieu. On appelle plan médiateur de [KL] le plan perpendiculaire en I à la droite (KL).
Démontrer que le plan médiateur de [KL] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.

B. Ici l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$; on considère les points

$$\text{A}(4~;~0~;~-3),\quad \text{B}(2~;~2~;~2),\quad \text{C}(3~;~-3~;~-1),\quad \text{D}(0~;~0~;~-3).$$

1. Démontrer que le plan médiateur de [AB] a pour équation
   $4x-4y-10z-13=0$.
   On admet pour la suite que les plans médiateurs de [BC] et [CD] ont respectivement pour équations $2x-10y-6z-7=0$ et $3x-3y+2z-5=0$.
2. Démontrer, en résolvant un système d'équations linéaires, que ces trois plans ont un unique point commun E dont on donnera les coordonnées.
3. En utilisant la **partie A** montrer que les points A, B, C et D sont sur une sphère de centre E. Quel est le rayon de cette sphère ?

∽ Baccalauréat S Asie juin 2005 ∾

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& 2-t \\ z &=& -3-t \end{array}\right.$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z-1=0$.

Dans chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule affirmation est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,5 *point; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à* 0.

Numéro de la ligne	Affirmation A	Affirmation B	Affirmation C
1.	Le point M de coordonnées $(-1\ ;\ 3\ ;\ 2)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point N de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ appartient à $\mathcal{D}$	Le point R de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ -4)$ appartient à $\mathcal{D}$
2.	Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\ ;\ 2\ ;\ -3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $(-2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$	Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(3\ ;\ 1\ ;\ -4)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$
3.	$\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$	$\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$
4.	Le point G de coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1;3;2)$ appartient à $\mathcal{P}$	Le point G de coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ -1)$ appartient à $\mathcal{P}$
5.	Le plan Q_1 d'équation cartésienne $x+2y-3z+1=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan Q_2 d'équation cartésienne $4x-5y-2z+3=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$	Le plan Q_3 d'équation cartésienne $-3x+2y-z-1=0$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$
6.	La distance du point T de coordonnées $(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : $\sqrt{14}$	La distance du point T de coordonnées $(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est : 14	La distance du point T de coordonnées $(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est : $2\sqrt{3}$

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\dfrac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\dfrac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

a. Calculer les probabilités $P(V)$ et $P(\text{J})$ des évènements respectifs V et J.

b. On note $P_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_V(R)$ puis $P(R \cap V)$.

c. Calculer $P(R)$.

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est- à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que
$p(X = -m)$ est 0,6.

c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $\text{E}(X) = \dfrac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.
Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$. Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

EXERCICE 3 — 5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+\text{i})z^2 + (17-8\text{i})z + 17\text{i} = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-\text{i}$ est solution de (E).

2. Déterminer les nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que :

$$z^3 + (-8+\text{i})z^2 + (17-8\text{i})z + 17\text{i} = (z+\text{i})\left(az^2 + bz + c\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+\text{i}$, $4-\text{i}$, $-\text{i}$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.
3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathcal{C}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z + 10 - 2\mathrm{i}}{z-2}$.
   - **a.** Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.
   - **b.** Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathcal{C}'$.
   - **c.** Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - \mathrm{i}|$ en fonction de z.
   - **d.** Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontrer que $\left|z' - \mathrm{i}\right| = 2\sqrt{5}$.
   - **e.** En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'étudier les similitudes directes qui transforment l'ensemble S_1 des sommets d'un carré $\mathcal{C}_1$ donné en l'ensemble S_2 des sommets d'un carré $\mathcal{C}_2$ donné.

Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = \left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B, C, D, E, F, G, H d'affixes respectives

$$-\frac{\mathrm{i}}{2},\quad 1-\frac{\mathrm{i}}{2},\quad 1+\frac{\mathrm{i}}{2},\quad \frac{\mathrm{i}}{2},\quad 1-\mathrm{i},\quad 3-\mathrm{i},\quad 3+\mathrm{i},\quad 1+\mathrm{i}.$$

$\mathcal{C}_1$ est le carré de sommets A, B, C, D et de centre O_1, $\mathcal{C}_2$ est le carré de sommet E, F G, H de centre O_2. S_1 est donc l'ensemble {A, B, C, D} et S_2 l'ensemble {E, F, G, H}.

1. Placer tous les points dans le repère $\mathcal{R}$, construire les carrés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
2. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe −1 et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de h et prouver que h transforme S_1 en S_2.
3. Soit s une similitude directe qui transforme S_1 en S_2 et soit g la transformation $g = h^{-1} \circ s$.
   - **a.** Quel est le rapport de la similitude s ?
   - **b.** Prouver que g est une isométrie qui laisse S_1 globalement invariant.
   - **c.** Démontrer que $g(\mathrm{O}_1) = \mathrm{O}_1$.
   - **d.** En déduire que g est l'une des transformations suivantes : l'identité, la rotation r_1 de centre O_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, la rotation r_2 de centre O_1 et d'angle π, la rotation r_3 de centre O_1 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   - **e.** En déduire les quatre similitudes directes qui transforment S_1 en S_2.
4. Étude des centres de ces similitudes.

a. Déterminer les écritures complexes de $h \circ r_1$, $h \circ r_2$, $h \circ r_3$.

b. En déduire les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3 de ces similitudes et les placer sur le dessin.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n \text{e}^x \,\text{d}x.$$

1. Calculer I_1.

2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2^n}{n!}\left(\text{e}^2 - 1\right)$.

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

4. Démontrer par récurrence que $\text{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$.

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

a. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).

7. Justifier enfin que :

$$\text{e}^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right).$$

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2005

EXERCICE 1 **3 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.
On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est $0,4$ et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est $0,3$.
On pourra construire un arbre pondéré.

1. On note :
   - D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;
   - R_1 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

   Calculer la probabilité de l'évènement R_1.
2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est $0,3$ et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est $0,2$. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

   On note :
   - D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel ».
   - R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».
   - R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

   Montrer que la probabilité de l'évènement R est $0,236$.
3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (on donnera la réponse arrondie au millième)
4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire ? (on donnera la réponse arrondie au millième)

EXERCICE 2 **5 points**
Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ unité graphique 8 cm.
On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1.
On appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.
À tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathscr{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

   a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.

b. Démontrer que $|z+1|^2+|z|^2=1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}$.

c. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ cherché.

3. Soit M un point de $\mathscr{E}$ et z son affixe, On désigne par r le module de z et α l'argument de z, $\alpha \in]-\pi\,;\,\pi]$.

a. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de $\mathscr{E}$ tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).

b. Représenter les ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

c. Déterminer les affixes des points M de $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N=a^2-b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.

2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.

3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\,;\,b)$ vérifiant la relation

$$(\mathrm{E}):\quad a^2-250\,507=b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.

a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.

b. Sachant que $a^2-250\,507=b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2-250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.

c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.

2. Justifier que si le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$.
Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\,;\,b)$.

3. On suppose que le couple $(a\,;\,b)$ vérifie la relation (E).

a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.

b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505+9k\,;\,b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.

2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?

3. Cette écriture est-elle unique ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec AB = AC = AD = a. On appelle A_1 le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AA_1) est orthogonale au plan (BCD).
$\left(\text{On pourra par exemple calculer } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC}\right)$.

2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment $[AA_1]$.

3. On appelle G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de [BC].

a. Montrer que G appartient au segment $[AA_1]$ et déterminer la longueur AG.

b. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right\| = 2 \left\| \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|.$$

4. Soit H le symétrique de A par rapport à G.

a. Démontrer que $4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.

b. Démontrer l'égalité $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

c. En déduire que HC = HD.

On rappelle que le volume d'une pyramide de hauteur h et d'aire de base associée b est

$$V = \frac{1}{3}bh.$$

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

I. Première partie

On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

1. Étudier les variations de f et de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

3. On pose $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}$.
À l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leqslant \ln u_n \leqslant S_n.$$

4. Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

5. Étude de la convergence de la suite (u_n).

a. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b. En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

c. On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leqslant w_n$ pour tout n entier naturel, alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
Montrer alors que $\frac{5}{6} \leqslant \ln \ell \leqslant 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

Baccalauréat S Métropole juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

Partie B

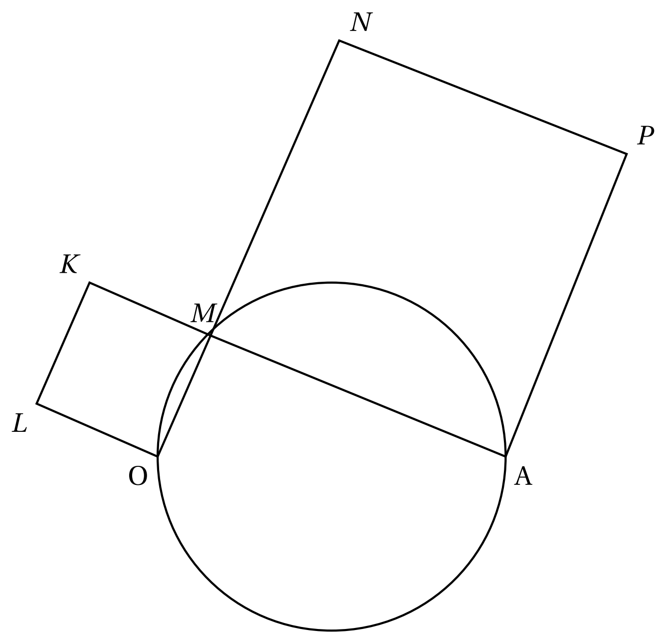
On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$, et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a $\left|m-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$.

2. Établir les relations suivantes : $l=\mathrm{i}m$ et $p=-\mathrm{i}m+1+\mathrm{i}$.

On admettra que l'on a également $n=(1-\mathrm{i})m+\mathrm{i}$ et $k=(1+\mathrm{i})m$.

3. **a.** Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

b. Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.

4. **a.** Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

b. Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure donnée en annexe. Cette annexe sera à rendre avec la copie.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Le quadrilatère MNPQ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère MNPQ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).

Partie A

On désigne par $m,\ n,\ p$ et q, les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Soit f la similitude directe de centre M qui transforme N en R.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.
   b. On désigne par r l'affixe du point R. Démontrer que $r = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}m + \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}n$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$(on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude f).
   On admettra que l'on a également les résultats $s = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}n + \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}p,\ t = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}p + \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}q$ et $u = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}q + \dfrac{1-\mathrm{i}}{2}m$, où $s,\ t$ et u désignent les affixes respectives des points S, T et U.
2. Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.
3. a. Démontrer l'égalité $u - s = \mathrm{i}(t - r)$.
   b. Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

Partie B

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1. Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la **partie A**, qu'il existe une unique rotation g qui transforme R en S et T en U.
2. Décrire comment construire géométriquement le point Ω, centre de la rotation g. Réaliser cette construction sur la figure de l'annexe.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour les questions 1 *et* 2, *on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à* 10^{-3} *près.*

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les évènements suivants :

$C1$: « L'enfant choisit la boîte cubique »,

$C2$: « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,

R : « L'enfant prend une bille rouge »,

V : « L'enfant prend une bille verte ».

a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b. Calculer la probabilité de l'évènement R.

c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}{2 + \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}}.$$

a. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y' = \frac{y}{4}.$$

a. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_2)\left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}\\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a. On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_3)\left\{\begin{array}{lcl} h'(t) & = & -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} \text{ pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,}\\ h(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

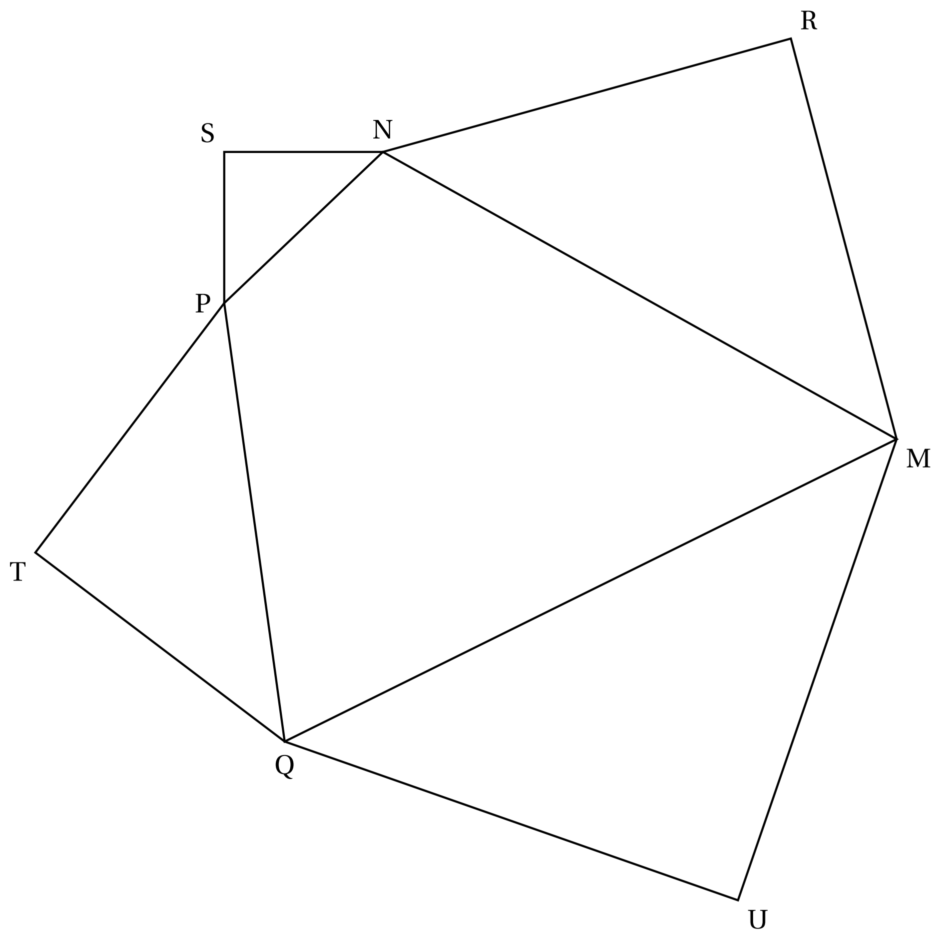
b. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c. Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

ANNEXE

À rendre avec la copie

Figure de l'exercice 2 de spécialité



∽ Baccalauréat S La Réunion juin 2005 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.
Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 *point, chaque réponse fausse enlève* 0,25 *point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.*
Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

$$\textbf{a. } \left(\frac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0} \quad \textbf{b. } \left(\frac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textbf{c. } \left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{n>0} \quad \textbf{d. } \left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$$

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 1$.

Alors :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$.

b. La suite (u_n) est minorée.

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.

d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1,5 \\ u_{n+1} & = & 2u_n - 1 \text{ pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.

b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

c. La suite (v_n) est majorée.

d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes les deux croissantes.

b. $x_3 = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$.

c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.

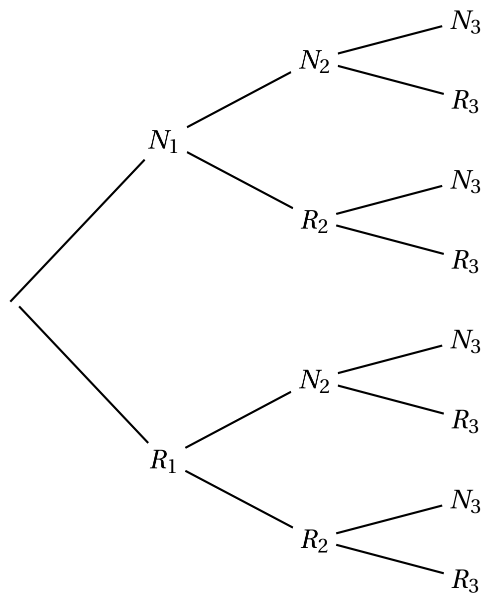
d. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. a. Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.
c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.

3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.

4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :
« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD$(a\,;\,b) = 1$ alors PGCD$(a^2\,;\,b^2) = 1$ ».
Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.
   a. Démontrer que $\text{PGCD}(\text{S}_{2k}\,;\, \text{S}_{2k+1}) = (2k+1)^2\text{PGCD}\big(k^2\,;\,(k+1)^2\big)$.
   b. Calculer PGCD $(k\,;\,k+1)$.
   c. Calculer $\text{PGCD}(\text{S}_{2k}\,;\,\text{S}_{2k+1})$.
3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.
   a. Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
   b. Calculer $\text{PGCD}(\text{S}_{2k+1}\,;\,\text{S}_{2k+2})$.
4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\text{C}) \quad \left\{\begin{array}{lcl} f(-x)f'(x) & = & 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 \end{array}\right.$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de trouver cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.
   a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer la fonction dérivée de la fonction g.
   c. En déduire que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.
   d. On considère l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.
2. **Question de cours**
   a. On sait que la fonction $x \longmapsto \text{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto K\text{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque
   b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

On appelle hauteur d'un tétraèdre toute droite contenant l'un des sommets de ce tétraèdre et perpendiculaire au plan de la face opposée à ce sommet.
Un tétraèdre est orthocentrique si ses quatre hauteurs sont concourantes.

Partie A

On considère un tétraèdre ABCD et on note H le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD). Démontrer que, si les hauteurs du tétraèdre ABCD issues des points A et B sont concourantes, alors la droite (BH) est une hauteur du triangle BCD.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points A(3 ; 2 ; −1), B(−6 ; 1 ; 1), C(4 ; −3 ; 3) et D(−1 ; −5 ; −1).

1. **a.** Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est :
   $-2x-3y+4z-13=0$.
   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{BH}} \cdot \overrightarrow{\text{CD}}$.
   d. Le tétraèdre ABCD est-il orthocentrique ?
2. On définit les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0), K(0 ; 0 ; 1). Le tétraèdre OIJK est-il orthocentrique ?

EXERCICE 5 **3 points**
Commun à tous les candidats

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, par

$$f(x)=\ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x)=\text{e}^x-1.$$

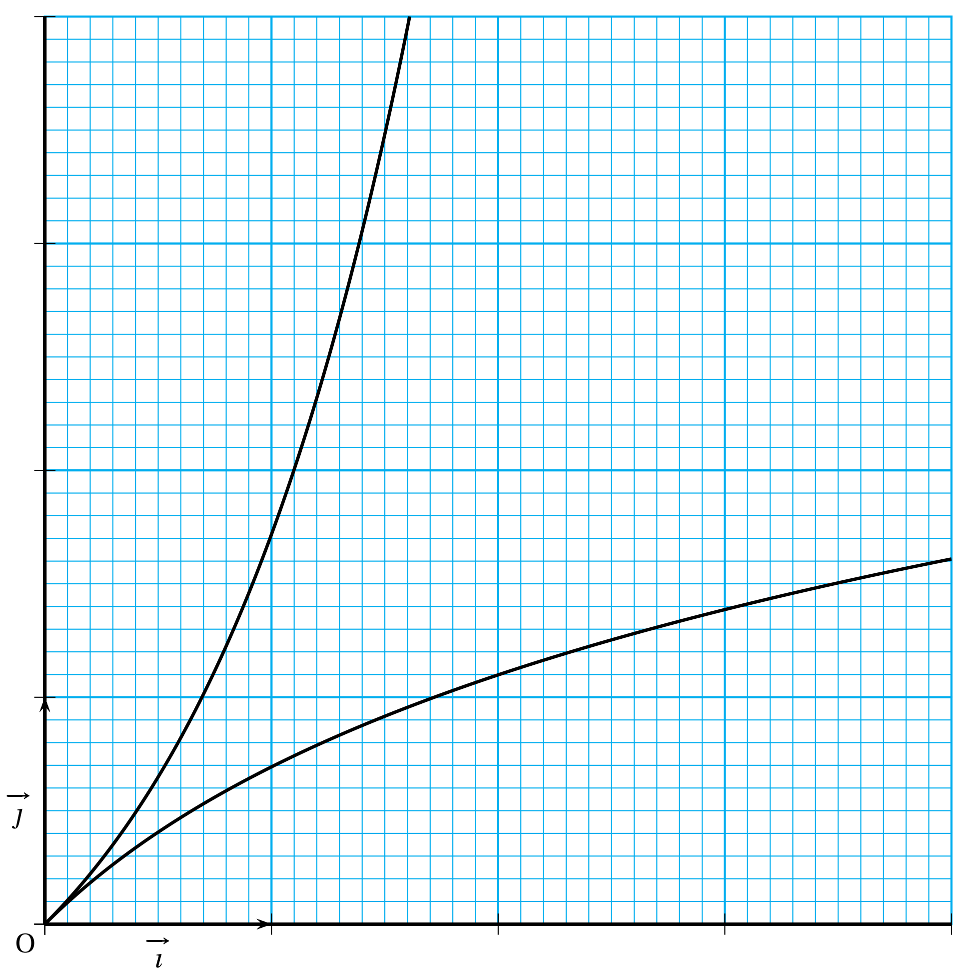
On désigne par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat,

1. Vérifier que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune au point O(0 ; 0). Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.
2. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $I(a)=\displaystyle\int_0^a \ln(x+1)\,\text{d}x$.
   a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que
   $$I(a)=a\ln(a+1)-\int_0^{\ln(a+1)}\left(\text{e}^x-1\right)\,\text{d}x.$$
   b. En déduire la valeur de $I(a)$.
   c. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.

ANNEXE

À rendre avec la copie

Courbes de l'exercice 5



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Liban juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».
Une réponse correcte rapporte 0,5 *point, une réponse incorrecte enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.*
Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.

1. « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\ ;\ +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. »
2. Soient f et g deux fonctions définies sur $[0\ ;\ +\infty[$, g ne s'annulant pas :
   « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ ».
3. « Si f est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ».
4. On considère un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.
   « Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ».
5. « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)\text{e}^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)\text{e}^x$ ».
6. Soient A, B, C trois points du plan. On appelle I le barycentre des points A et B affectés respectivement des coefficients 3 et -2.
   « Si G est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1 alors G est le milieu du segment [CI] ».
7. Soient A, B, C trois points du plan et G le barycentre de A, B et C affectés respectivement des coefficients 3, -2 et 1.
   « L'ensemble des points M du plan tels que $\|3\overrightarrow{M\text{A}} - 2\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\| = 1$ est le cercle de centre G et de rayon 1 ».
8. Soient A et B deux points distincts du plan. On désigne par M un point quelconque du plan.
   « Le produit scalaire $\overrightarrow{M\text{A}} \cdot \overrightarrow{M\text{B}}$ est nul si et seulement si $M = \text{A}$ ou $M = \text{B}$ ».

EXERCICE 2 **3 points**

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On note T_1 l'évènement : « le premier test est positif ».
On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
   Déterminer les probabilités des évènements T_1, et C.
2. La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
   Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
   Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.
   On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain »(éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.
   b. Exprimer l'espérance de X en fonction de a.
   c. À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

EXERCICE 3 **8 points**

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f\ :\ t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g\ :\ t \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{(R)}$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.
Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par le deuxième calculatrice
1	7,182 818 284 5E−01	7,182 818 284 6E−01
2	4,365 636 569 1E−01	4,365 636 569 2E−01
3	3,096 909 707 5E−01	3,096 909 707 6E−01
4	2,387 638 830 1E−01	2,387 638 830 4E−01
5	1,938 194 150 8E−01	1,938 194 152 0E−01
6	1,629 164 905 1E−01	1,629 164 912 0E−01
7	1,404 154 335 81E−01	1,404 154 384 0E−01
8	1,233 234 686 9E−01	1,233 235 072 0E−01
9	1,099 112 182 8E−01	1,099 115 648 0E−01
10	9,911 218 282 5E−02	9,911 564 800 0E−01
11	9,023 401 108 0E−02	9,027 212 800 0E−02
12	8,280 813 296 3E−02	8,326 553 600 0E−02
13	7,650 572 852 2E−02	8,245 196 800 0E−02
14	7,108 019 930 9E−02	1,543 275 520 0E−01
15	6,620 298 963 6E−02	1,314 913 280 06E+00
16	5,924 783 418 6E−02	2,003 861 248 0E+01
17	7,213 181 161 2E−03	3,396 564 121 6E+02
18	−8,701 627 390 9E−01	6,112 815 418 9E+03
19	−1,753 309 204 2E+01	1,161 424 929 6E+05
20	−3,516 618 408 5E+02	2,322 848 859 2E+06
21	−7,385 898 658 0E+03	4,877 982 504 3E+07
22	−1,624 907 704 7E+05	1,073 156 149 9E+09
23	−3,737 288 720 9E+06	2,468 259 144 8E+10
24	−8,969 493 030 2E+07	5,923 821 947E+11
25	−2,242 372 585E+09	1,480 955 486 9E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.

2. **a.** Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)v_n - 1.$$

1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.
(On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Unité graphique : 0,5 cm.
On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6\mathrm{j}$ et $c = 8\mathrm{j}^2$.
Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' etC' dans le repère donné.
2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.
   a. Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.
   b. Montrer que $b' = 16\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   En déduire que O est un point de la droite BB'.
   c. On admet que $c' = 7 + 7\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.
3. On se propose désormais de montrer que la distance $M\mathrm{A} + M\mathrm{B} + M\mathrm{C}$ est minimale lorsque $M = \mathrm{O}$.
   a. Calculer la distance OA + OB + OC.
   b. Montrer que $\mathrm{j}^3 = 1$ et que$1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
   c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
   On rappelle que $a = 8$, $b = 6\mathrm{j}$ et $c = 8\mathrm{j}^2$.
   Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left|(a-z) + (b-z)\mathrm{j}^2 + (c-z)\mathrm{j}\right| = \left|a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}\right| = 22.$$

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes $z,\ z'$ et z'' :

$$\left|z + z' + z''\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| + \left|z''\right|.$$

Montrer que $M\mathrm{A} + M\mathrm{B} + M\mathrm{C}$ est minimale lorsque $M = \mathrm{O}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k,\ 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

— à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

— à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1 \quad$ modulo p.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1 \quad$ [modulo 227].

c. En utilisant **1. b.**, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A. $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

Baccalauréat S Polynésie 9 juin 2005

Exercice 1 **3 points**

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres.
Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b.
2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.
Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :
A : « la montre tirée présente le défaut a » ;
B : « la montre tirée présente le défaut b » ;
C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».
On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,882$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.
   On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b.
   On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».
   Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(3 ; 1 ; 3) et B(−6 ; 2 ; 1).
Le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne $x + 2y + 2z = 5$.

1. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|4\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}}\right\| = 2$ est :
   a. un plan de l'espace **b.** une sphère **c.** l'ensemble vide.
2. Les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ sont :
   a. $\left(\frac{11}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ **b.** $\left(\frac{8}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{7}{3}\right)$ **c.** $\left(\frac{7}{3} ; -\frac{1}{3} ; \frac{5}{3}\right)$.
3. La sphère de centre B et de rayon 1 :
   a. coupe le plan $\mathscr{P}$ suivant un cercle ;
   b. est tangente au plan $\mathscr{P}$;

c. ne coupe pas le plan $\mathscr{P}$.

4. On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1~;~2~;~-1)$ et la droite $\mathscr{D}'$ d'équations paramétriques $\left\lbrace\begin{array}{l c l}x&=&3+2t\\y&=&3+t\\z&=&t\end{array}\right.\quad (t \in \mathbb{R})$.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

a. coplanaires et parallèles **b.** coplanaires et sécantes **c.** non coplanaires.

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est :

a. la droite d'équations paramétriques $\left\lbrace\begin{array}{l c l}x&=&-\dfrac{3}{2}-t\\y&=&\dfrac{3}{2}-7t\\z&=&2+t\end{array}\right.\quad (t \in \mathbb{R})$.

b. le plan d'équation cartésienne $9x-y+2z+11=0$.

c. le plan d'équation cartésienne $x+7y-z-7=0$.

Exercice 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par

$$\left\lbrace\begin{array}{l c l}u_0&=&14\\u_{n+1}&=&5u_n-6 \text{ pour tout entier naturel } n\end{array}\right.$$

1. Calculer $u_1,~u_2,~u_3$ et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n,~u_{n+2} \equiv u_n \quad$ (modulo 4).
En déduire que pour tout entier naturel $k,~u_{2k} \equiv 2 \quad$ (modulo 4) et
$u_{2k+1} \equiv 0 \quad$ (modulo 4).

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2}+3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \quad$ (modulo 100).

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 3 — 7 points

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x.$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\text{O},~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan.

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
   b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\,;\,+\infty[$.
   On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.
   b. Sur la page annexe, on a tracé Γ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
   c. Préciser la valeur de α_1.
   d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.
3. **a.** Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
   b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = \ln x - x + 1.$$

   En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.
   c. Tracer Δ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.
4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur $\mathbb{N}$ une suite $\left(\beta_n\right)$ de réels tels que $g\left(\beta_n\right) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :
   Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
   « *Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A* ».
   Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*
2. Montrer que la suite $\left(\beta_n\right)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 **5 points**

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b,
   $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.
   Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a,\ b$ et c définies par :

$$a = 2, \quad b = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
On pose B$'$ = r'(B) et C$'$= r(C) et on note b' et c' les affixes respectives de B$'$ et C$'$.

a. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b. Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

c. Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [CB], [BB$'$], [B$'$C$'$] et [C$'$C]. On note $m,\ n,\ p$ et q leurs affixes.

a. Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$.
En déduire que les points O, N et C sont alignés.

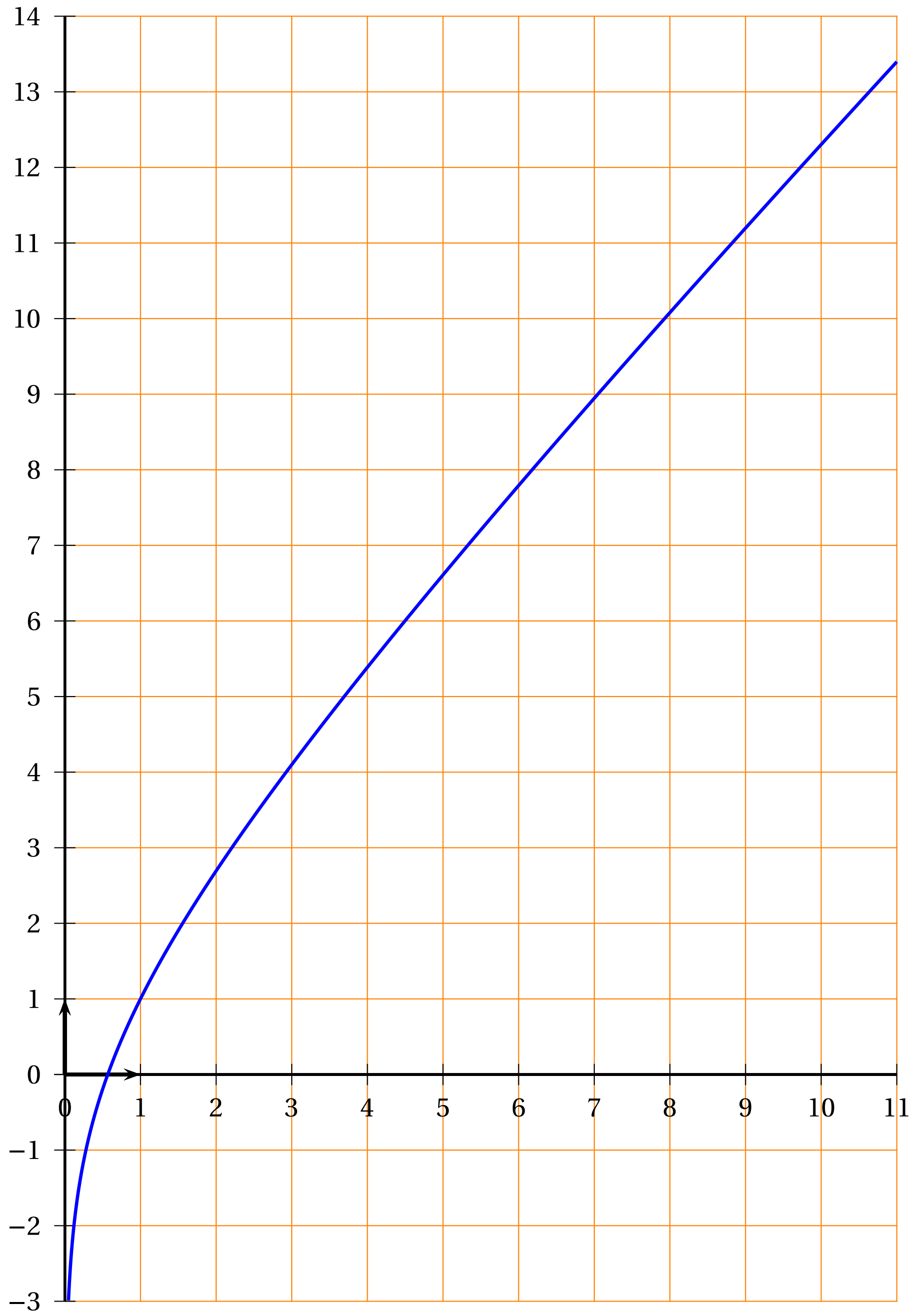
b. Montrer que $n + 1 = \mathrm{i}(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré.

Page annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3



Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2005

EXERCICE 1 **5 points**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$.

1. **a.** Démontrer que pour tout $n \geqslant 3,\ u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant n - 2$.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.
   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
   c. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et $\left(y_n\right)$ une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
   d. En déduire l'expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.

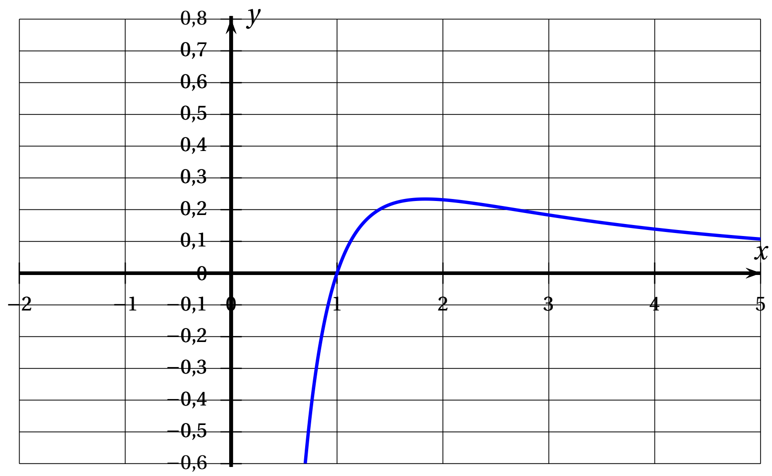
EXERCICE 2 **4 points**

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2 + x}.$$

1. Montrer que pour tout $x > 1,\ \dfrac{\ln x}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x}$.
2. **a.** Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_2^4 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour cette dernière).
   b. En déduire un encadrement de $\mathrm{K} = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. La figure ci-dessous représente la courbe représentative de f (unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 unité, en ordonnées 4 cm pour 1 unité). On considère l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2 & \leqslant & x & \leqslant & 4 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right. \quad \text{et on note } \mathscr{A} \text{ son aire.}$$



À l'aide de l'encadrement trouvé au 2 b, donner un encadrement de $\mathscr{A}$ en cm^2.

EXERCICE 3 **4 points**

Soit $\mathscr{P}$ le plan complexe rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm). Soit A le point d'affixe 1. On note f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1}{z-1}.$$

1. **a.** Soit B le point d'affixe $b = 4 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de l'affixe b' de B$'$.
   b. Déterminer les affixes des points ayant pour image par f leur symétrique par rapport à O.
2. **a.** Exprimer $\left|z'\right|$ et $\arg\left(z'\right)$ en fonction de $|z-1|$ et $\arg(z-1)$.
   b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. On suppose que M est un point de $\mathscr{C}$. Déterminer $\left|z'\right|$.
   En déduire que M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.
   c. Placer un point M quelconque sur le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$ et construire son image M'. (On laissera les traits de construction,)

EXERCICE 4 **4 points**

On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La probabilité pour un client d'attendre moins de t min est définie par :

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de t.

   b. En déduire que le temps moyen est $\dfrac{1}{\lambda}$.

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?
3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

EXERCICE 5 — 4 points

Pour cet exercice, vous recopierez pour chaque question, votre réponse.
Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse.*
La note finale de l'exercice ne pourra pas être inférieure à zéro.

Soit $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal.

1. La droite passant par A(1 ; 2 ; −4) et B(−3 ; 4 ; 1) et la droite représentée par
$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& -11-4t\\ y &=& 8+2t\\ z &=& 11+5t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R} \text{ sont :}$$
☐ sécantes ☐ strictement parallèles ☐ confondues ☐ non coplanaires

2. Soient le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-z+4=0$ et la droite $\mathscr{D}$ représentée par
$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& 8+t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$$
☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont sécants. ☐ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont strictement parallèles.
☐ $\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$. ☐ Aucune de ces possibilités n'est vraie.

3. La distance du point A(1 ; 2 ; −4) au plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ est :
☐ $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$ ☐ 16 ☐ $8\sqrt{14}$ ☐ $\dfrac{8}{7}$

4. Soient le point B(−3 ; 4 ; 1) et la sphère $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=16$;
☐ B est à l'intérieur de $\mathscr{S}$ ☐ B est à l'extérieur de $\mathscr{S}$
☐ B est sur $\mathscr{S}$ ☐ On ne sait pas.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole septembre 2005 ∾

EXERCICE 1 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+10)\text{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
5. Calculer l'intégrale $\text{I} = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\text{d}x$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est
$y(0) = 10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + \frac{1}{2}y = 20\text{e}^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la **partie A** est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
   - **a.** On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0~;~+\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, de l'équation différentielle :
   (E′) $y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.
   - **b.** Résoudre l'équation différentielle (E′).
   - **c.** Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescent-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.
Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point, chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*
Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. On a alors :

A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128\text{i}$. **C** : $z^{14} = -64 + 64\text{i}\sqrt{3}$.
B : $z^{14} = 64 - 64\text{i}$. **D** : $z^{14} = -128 + 128\text{i}\sqrt{3}$

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-3| = |3-4\text{i}|$.
A : (E) est la médiatrice du segment [ST] ;
B : (E) est la droite (ST) ;
C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3-4\text{i}$, et de rayon 3 ;
D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. On considère un hexagone régulier ABCDEF, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AC}} \cdot \overrightarrow{\text{CF}}$ est égal à :

A : $\sqrt{3}$ **B** : -3 **C** : $-\sqrt{3}$ **D** ; $\dfrac{3}{2}$.

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.
A : Γ admet une asymptote d'équation $y=-1$.
B : Γ n'admet pas d'asymptote.
C : Γ admet une asymptote d'équation $y=x$.
D : Γ admet une asymptote d'équation $y=1$.

5. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \text{e}^{-t^2}\,\text{d}t$. La fonction f'', dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$, est définie par :

A : $f''(x) = \displaystyle\int_0^x -2t\text{e}^{-t^2}\,\text{d}t$. **C** : $f''(x) = -2x\text{e}^{-x^2}$.
B : $f''(x) = \displaystyle\int_0^x -2x\text{e}^{-x^2}\,\text{d}x$. **D** : $f''(x) = \text{e}^{-x^2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 6).$$

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.
B : il n'y a aucune solution.
C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$.
D : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$ ou $x \equiv 5 \quad (\text{modulo } 6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (34k - 7\,;\,5 - 24k),\ k \in \mathbb{Z}$.
B : L'équation (E) n'a aucune solution.
C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (17k - 7\,;\,5 - 12k)$,
$k \in \mathbb{Z}$.
D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x\,;\,y) = (-7k\,;\,5k),\ k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,789^{2\,005}$. On a alors :
A : $n \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$ et $p \equiv 0 \quad (\text{modulo } 17)$.
B : p est un nombre premier.
C : $p \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$.
D : $p \equiv 1 \quad (\text{modulo } 17)$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - \mathrm{i}a}{1 - \mathrm{i}}$. **C** : $a - z = \mathrm{i}(b - z)$.
B : $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$. **D** : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre 1.
A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.
B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].
C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.
D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point B(1 ; −2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\,(-2\,;\,1\,;\,5)$ et le plan $\mathscr{R}$ d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.
   a. Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont perpendiculaires.
   b. Démontrer que l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ est la droite Δ passant par le point C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\,;\,-1\,;\,1)$.
   c. Soit le point A(5 ; −2 ; −1). Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathscr{R}$.
   d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ.
2. **a.** Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées
   $(1+2t\,;\,3-t\,;\,t)$.
   Déterminer en fonction de t la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$; préciser son minimum.
   c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.
On considère les évènements suivants :
E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
F est l'évènement « à l'issue d une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.
2. On effectue dix parties identiques et indépendantes.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré.
Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance, ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.
On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble (1 ; 2 ; 3 ; 4) puis, pour chaque simulation, on calcule
$d^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le 9e décile de la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,009 8.
Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Polynésie septembre 2005 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.
À l'instant 0, la puce est en A.
Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;
  soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.
- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est :
  soit en C, soit en A de façon équiprobable
- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement $B_n,\ C_n$) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C).
On note a_n (respectivement $b_n,\ c_n$) la probabilité de l'évènement A_n, (respectivement $B_n,\ C_n$).
On a donc : $a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = 0$.
Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer $a_k,\ b_k$ et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n,
$$a_n + b_n + c_n = 1 \text{ et } \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n \end{array}\right.$$
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel p,
$$\left\{\begin{array}{lll} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} & b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p \end{array}\right. .$$
3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.
   On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2 **7 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est la réunion de deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ où $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et où $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une transformation simple que l'on précisera.
2. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).
   a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de $\mathcal{C}$.
   b. Tracer $\mathcal{H}$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   On nomme A et B les points de la courbe d'abscisses respectives -3 et 3.
   On considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan constitué des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant :
   $$-3 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } \sqrt{x^2+16} \leqslant y \leqslant 5.$$
   Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ et exprimer l'aire de $\mathcal{D}$ à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

1. **a.** Donner l'écriture complexe de r.
   b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image du point $M(x\,;\,y)$ du plan.
   Vérifier que $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases}$
   Déterminer les coordonnées des points A′ et B′, images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A′ et B′ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
2. Soit $\mathcal{H}'$ l'hyperbole d'équation $xy = 8$.
   a. Tracer $\mathcal{H}'$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   b. Montrer que $\mathcal{H}'$ est l'image de $\mathcal{H}$ par la rotation r.
3. Soit $\mathcal{D}'$ l'image de $\mathcal{D}$ par la rotation r. On admet que $\mathcal{D}'$ est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 4\sqrt{2}$ et $\dfrac{8}{x} \leqslant y \leqslant 5\sqrt{2} - x$.
   a. Hachurer $\mathcal{D}'$.
   b. Calculer l'aire de $\mathcal{D}'$,exprimée en cm^2.
   En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de $\mathcal{D}$.

EXERCICE 3 **3 points**

Pour chacune des 3 *questions, une seule des trois propositions est exacte.*
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,5 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre A$(-2\ ;\ 5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :
   a. $|z-2+5\mathrm{i}|^2=3$;
   b. $|z+2-5\mathrm{i}|^2=3$;
   c. $|z-2+5\mathrm{i}|=3$.
2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.
   a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;
   b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB] ;
   c. M est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Soit A et B les points d'affixes respectives 1 + i et 5 + 4i, et C un point du cercle de diamètre [AB]. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.
   a. $|z_G-3-2,5\mathrm{i}|=\dfrac{5}{6}$;
   b. $z_G-(1+\mathrm{i})=\dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$;
   c. $z_G-(3+2,5\mathrm{i})=\dfrac{1}{3}(4+3\mathrm{i})$.

EXERCICE 4 **5 points**

L'annexe se rapporte à cet exercice.
Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ de l'annexe. On considère également la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$-\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.
3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
4. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

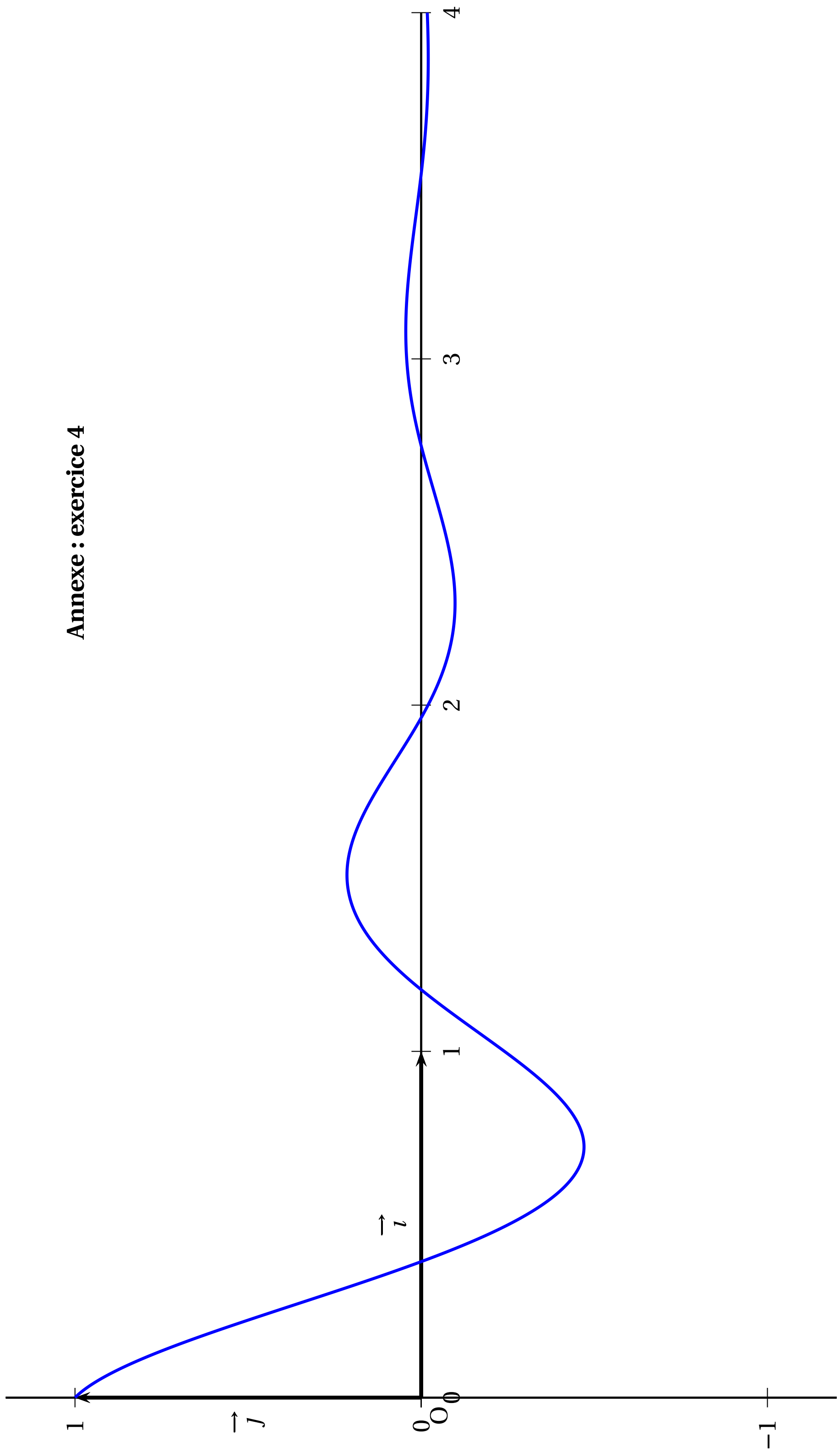
$$f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right].$$

b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

Annexe : exercice 4



Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Unité graphique : **4 cm**

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_I = 1\ ,\ z_J = i\ ,\ z_H = 1 + i\ ,\ z_A = 2\ ,\ z_B = \frac{3}{2} + i\ ,\ z_C = 2i \text{ et } z_D = -1$$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.
   Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_F = -1 + \frac{1}{2}i$.
3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe :

$$z' = -i\overline{z} + 2i.$$

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.
2. **a.** Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?
   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?
3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.
4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.
   a. Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -i\overline{z} + 1 + i$.
   b. Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.
   c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Unité graphique : **3 cm**

À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' par l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6}.$$

1. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1+2\text{i}, z_{\text{B}} = 1$ et $z_C = 3\text{i}$.
   Déterminer les affixes des points A$'$, B$'$, C$'$ images respectives de A, B, C par f.
   Placer les points A, B, C, A$'$, B$'$, C$'$.
2. On pose $z = x+\text{i}y$ (avec x et y réels).
   Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.
   Tracer (D). Quelle remarque peut-on faire ?
4. Soit M un point quelconque du plan et M' son image par f. Montrer que M' appartient à la droite (D).
5. **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe z :
   $$\frac{z'-z}{z_{\text{A}}} = \frac{z+\overline{z}}{6} + \text{i}\frac{z-\overline{z}}{3}.$$
   En déduire que le nombre $\dfrac{z'-z}{z_{\text{A}}}$ est réel.
   b. En déduire que, si $M' \neq M$, les droites (OA) et (MM') sont parallèles.
6. Un point quelconque N étant donné, comment construire son image N' ? (on étudiera deux cas suivant que N appartient ou non à (D)).
   Effectuer la construction sur la figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n} \text{ pour } n \geqslant 2 \end{cases}$

et $v_n = u_n - \ln n$ pour $n \geqslant 1$

1. **a.** Calculer u_2, u_3 et u_4.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\text{d}x \leqslant \frac{1}{k}$
   b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :
   $$u_n - 1 \leqslant \ln n \leqslant u_n - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant v_n \leqslant 1$$
3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\text{d}x.$$
   b. En déduire le sens de variations de la suite (v_n).

4. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de la suite (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ).
Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte ***deux parties indépendantes.***
La partie **I** *est la démonstration d'un résultat de cours. La partie* **II** *est un Q.C.M.*

Partie I

Question de cours
Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 *point. Une réponse fausse enlève* 0,5 *point. L'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie* **II** *est ramenée à zéro.*

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher.
On extrait simultanément trois boules de l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

A $\dfrac{75}{512}$ **B** $\dfrac{13}{56}$ **C** $\dfrac{15}{64}$ **D** $\dfrac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population.
Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.
Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

A $\dfrac{1}{120}$ **B** $\dfrac{3}{40}$ **C** $\dfrac{1}{12}$ **D** $\dfrac{4}{40}$

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.
Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
Quelle est la variance de X ?

A 2 **B** 13 **C** 16 **D** 17

4. La durée d'attente T, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t > 0$: $P(T < t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$
(avec $\lambda = \dfrac{1}{6}$)
où t désigne le temps exprimé en minutes.

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à 10^{-4} près) que son temps total soit inférieur à 5 minutes ?

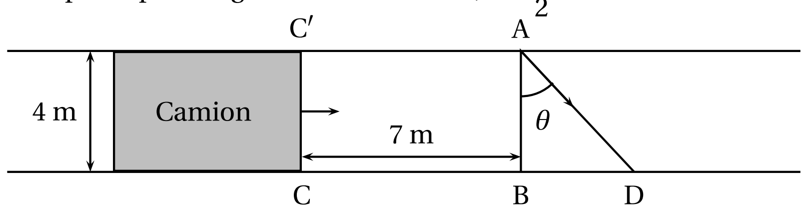
A 0,2819 **B** 0,3935 **C** 0,5654 **D** 0,6065

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à … 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC′] sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D.
Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{\text{BAD}}$ avec $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).



1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2. On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta}$.
   Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
3. Conclure.

Rappel :
La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et a pour dérivée la fonction
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2005 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
   - **a.** si ce composant est défectueux;
   - **b.** si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
   $$P(T \geqslant t) = 0,02\mathrm{e}^{-5\times 10^{-4}t} + 0,98\mathrm{e}^{-10^{-4}t}.$$
   (on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).
3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux?
   Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty[$:

Pour $0 \leqslant a \leqslant b,\ P([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Pour $c \geqslant 0,\ P([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a,\ b,\ c$ et d telles que :

$$a = \mathrm{i}, \qquad b = 1 + 2\mathrm{i}, \qquad c = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \quad \text{et} \quad d = 3 + 2\mathrm{i}.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z.
   Déterminer les éléments caractéristiques de s.
   Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & 0 \\ U_{n+1} & = & 2U_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\end{array}\right.$
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ U_{n+1}$ et U_n sont premiers entre eux.
3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite (U_n).
4. Montrer que pour tout entier naturel $n,\ U_n = 2^n - 1$.
5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geqslant p$,

   $$U_n = U_p\left(U_{n-p} + 1\right) + U_{n-p}.$$

   La notation pgcd$(a\,;\,b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geqslant p$ l'égalité

   $$\operatorname{pgcd}\left(U_n\,, U_p\right) = \operatorname{pgcd}\left(U_p,\ U_{n-p}\right).$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :

   $$\operatorname{pgcd}\left(U_n,\ U_p\right) = U_{\operatorname{pgcd}(n\,;\,p)}.$$

   Déterminer le nombre : pgcd$(U_{2005},\ U_{15})$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.

3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.

4. **a.** Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b. Exprimer $\left|z'\right|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.

c. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que $\mathrm{O}P = 3$, et construire géométriquement son image P' par f.

5. On considère le cercle $\mathscr{C}_1$, de centre Jet de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathscr{C}_1$, distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

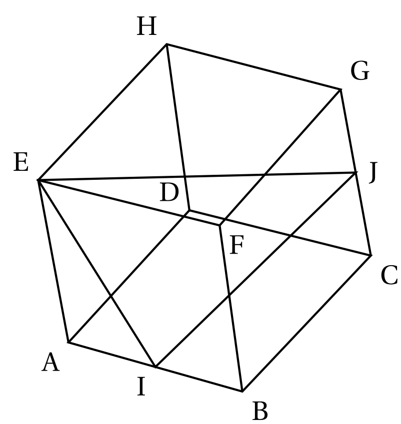
EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 *point. Toute réponse erronée enlève* 0,1 *point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.*

On donne le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG]. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre.

Le candidat est appelé à juger chacune des 10 *affirmations suivantes.*



On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
1.	$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{2}$	
2.	$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$	
3.	$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IC}}$	
4.	$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{IC} \times \cos\dfrac{\pi}{3}$	

On utilise à présent le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

	Affirmation	VRAI ou FAUX
5.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\left\lbrace\begin{array}{l c l}x&=&t+1\\y&=&2t\\z&=&t\end{array}\right.$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$.	
6.	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\left\lbrace\begin{array}{l c l}x&=&\frac{1}{2}t+1\\y&=&t+1\\z&=&\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\end{array}\right.$, le paramètre t décrivant $\mathbb{R}$	
7.	$6x-7y+8z-3=0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ).	
8.	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par l et par le milieu de l'arête [DC].	
9.	Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).	
10.	Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\frac{1}{6}$.	

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x)=x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Étudier le sens de variation de f et de g. Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie B

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x)=\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Que représente G pour la fonction g ?

2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.

3. Étudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction F sur R *par : pour tout réel x,* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. Démontrer, que, pour tout réel x, $G(x) = \dfrac{1}{2}\left[F(x) - x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left[F(x) - x\mathrm{e}^{-x^2}\right]$.

On admet que la fonction F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et que cette limite ℓ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathscr{A}$ limité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les demi-droites $\left[\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$ *et* $\left[\mathrm{O}\,;\,\vec{\jmath}\right)$.

5. **a.** Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel $\mathrm{N} = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire $\mathscr{P}$ en unités d'aire du domaine $\mathscr{D}$ limité par la demi-droite $\left[\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\right)$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ justifier graphiquement que :

$$\int_0^1 \left(1 - t^2\right)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ell}{2}.$$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)

Document à rendre avec la copie - Annexe

Exercice 3

Affirmation n°	VRAI ou FAUX
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Exercice 4