

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Besançon juin 1969 ∞

EXERCICE 1

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé, le point M image du nombre z . Soit M' le symétrique de M par rapport à la bissectrice de l'angle (\vec{Ou}, \vec{Ov}) et M'' le symétrique de M' par rapport au support de \vec{Ov} .

Posant $z = a + ib$, calculer en fonction de a et b les affixes, z' et z'' , des points M' et M'' , puis le rapport $\frac{z''}{z'}$.

En déduire la mesure de l'angle $(\vec{OM'}, \vec{OM''})$ et la valeur du rapport $\frac{OM''}{OM'}$.
Pouvait-on prévoir géométriquement ces résultats?

EXERCICE 2

1. Étudier le sens de variation de la fonction, f , de la variable réelle x définie par

$$x \mapsto f(x) = y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

sur l'intervalle $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.

2. Démontrer que la fonction f admet une fonction réciproque, $x = g(y)$.

Posant $X = y$ et $Y = x$, tracer sur la même figure qu'au 1. la courbe représentative de la fonction

$$X \mapsto g(X) = Y.$$

PROBLÈME

Partie A

1. Par rapport à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'axes $\vec{x'Ox}$ et $\vec{y'Oy}$, on donne le cercle (C) d'équation

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

et la droite (D) d'équation

$$x = 1,$$

qui coupe Ox en A

M désignant un point de (C) , distinct de O , la droite OM coupe (D) en I . On appelle P le symétrique de M par rapport à I et l'on pose

$$\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta \pmod{2\pi}.$$

Calculer OP en fonction de θ et les coordonnées, x et y , de P en fonction de $\text{tg } \theta = t$.
Former une relation algébrique entre x et y , indépendante de t .

2. Étudier le sens de variation de la fonction, f , de la variable réelle x définie par la relation

$$x \longmapsto f(x) = y = x \sqrt{\frac{1-x}{x-2}} \quad \text{pour } 1 \leq x < 2.$$

Tracer sa courbe représentative dans le repère Ox, Oy . Préciser la tangente au point d'abscisse $x = 1$.

En déduire l'ensemble des points P lorsque M varie sur (C) .

3. Une inversion de pôle O et de puissance 1 transforme M en M' et P en P' .

Démontrer que M' et P' sont conjugués par rapport au cercle (C) et que les droites AP' (lorsque P' et A sont distincts) et OI sont des droites conjuguées par rapport au cercle (C) .

Établir que le produit des coefficients directeurs des droites OI et AP' est constant lorsque M varie sur (C) .

En déduire l'équation de l'ensemble des points P' et construire cet ensemble.

Reconnaitre que cet ensemble appartient à une ellipse, dont on donnera les coordonnées des sommets et des foyers.

Partie B

1. On donne, par rapport au repère de la partie A, la droite (Δ) d'équation

$$y = mx + p, \quad \text{avec } p \neq 0.$$

À tout point variable, M , de (Δ) , d'abscisse x telle que $x(x-2) \neq 0$, on associe le point P aligné avec O et M de façon que le milieu, I , du segment MP ait pour abscisse 1.

Former l'équation de la courbe (Γ) , support des points P associés aux points M de (Δ) .

2. Trouver l'équation de cette courbe dans le repère $(\omega, \vec{i}_1, \vec{j}_1)$, ω étant le point de coordonnées $(2; 2m-p)$, \vec{i}_1 et \vec{j}_1 étant les vecteurs

$$\vec{i}_1 = \vec{i} + m\vec{j}, \quad \vec{j}_1 = \vec{j}.$$

Reconnaitre alors la courbe (Γ) .