

Durée : 4 heures

œ Baccalauréat C 1975 Besançon œ

EXERCICE I

Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$(2 + i)Z^2 - (9 + 2i)Z + 5(3 - i) = 0.$$

II.

1. Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1},$$

où le nombre e est la base des logarithmes népériens.

Étudier les variations de f . Construire sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$.

2. Calculer l'aire de la partie du plan

$$A = \{M(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3 \quad 1 \leq y \leq f(x)\}.$$

III.

On considère l'ensemble \mathcal{M} des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & -1 \end{pmatrix},$$

où λ est un nombre réel non nul.

Partie A

1. a. Montrer que si A_λ et A_μ sont deux éléments de \mathcal{M} , on a

$$A_\lambda \cdot A_\mu = A_\mu \cdot A_\lambda \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda = \mu.$$

b. Montrer que $A_\lambda \cdot A_\mu + A_\mu \cdot A_\lambda = h(\lambda, \mu)I$, où $h(\lambda, \mu)$ est un scalaire réel et I la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Montrer que } h(\lambda, \mu) = 0 \text{ si, et seulement si } \lambda = \mu.$$

Que peut-on dire de A_λ^2 ?

c. Calculer $(A_\lambda + A_\mu)^2$.

2. a. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que

$$(A_\lambda + A_\mu)^{2n} = (-1)^n \frac{(\lambda - \mu)^{2n}}{(\lambda\mu)^n} I.$$

- b. Montrer que la matrice $(A_\lambda + A_{2\lambda})^{2n}$ ne dépend pas de λ .
3. On dit qu'une matrice $M(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ dont les éléments dépendent d'un paramètre x , possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$ s'il existe une matrice $L = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ telle que

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) \quad \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x)$$

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) \quad \delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} d(x).$$

- a. Montrer que la matrice $C_n = \sum_{p=1}^{p=n} (A_\lambda + A_{2\lambda})^{2p}$ a, pour n tendant vers $+\infty$, une limite que l'on calculera.
- b. Exprimer la matrice $B_n = \sum_{p=1}^{p=n} (A_p + A_{p+1})^2$.
- c. Montrer que la matrice B_n a, lorsque $n \rightarrow +\infty$, une limite que l'on calculera.

Partie B

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble \mathcal{E} des matrices de la forme $aI + bJ$; a et b étant réels.

1. Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble $\mathcal{M}_{2,2}$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire.
2. \mathcal{E} muni de l'addition et de la multiplication des matrices est-il un anneau?
3. Soit $M = aI + bJ$ un élément de \mathcal{E} .

Montrer que pour tout entier $q \geq 1$ la matrice M^q peut s'écrire $M^q = a^q I + q a^{q-1} J$.

Partie C

\vec{E} étant un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée directe (\vec{i}, \vec{j}) , on considère pour a, b fixés l'endomorphisme $f_{a,b}$ de \vec{E} défini par la matrice $M = aI + bJ$.

1. Montrer que $f_{a,b}$ est un automorphisme de \vec{E} si, et seulement si, $a \neq 0$.
2. Quelle est la matrice représentant $f_{a,b}$ quand on rapporte le plan à une nouvelle base orthonormée (\vec{i}_1, \vec{j}_1) déduite de la première par une rotation vectorielle d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$?