

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Besançon juin 1976 ∞

EXERCICE 1

r est un nombre réel strictement positif et α un réel de $] -\pi ; \pi]$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - 2r \cos \alpha z + r^2 = 0.$$

On appellera z_1 et z_2 les solutions et on précisera le module et l'argument de chacune.

2. Calculer z_1^n et z_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et déterminer $P_n = z_1^n + z_2^n$.

Cas particulier : $r = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Trouver une relation indépendante de n entre P_n et P_{n+3} dans ce cas ; quelle est alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n ?$$

EXERCICE 2

n est un nombre entier strictement positif. Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, où e est la base du logarithme népérien.

1. Démontrer que le nombre I_n existe pour tout n de \mathbb{N}^* et qu'il est strictement positif.

Calculer I_1 .

2. Démontrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

(On pourra utiliser une intégration par parties).

Calculer alors I_2 et I_3 .

3. Utiliser les résultats précédents pour calculer :

$$I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x) e^{-x} dx.$$

PROBLÈME

Partie A

Soit un espace vectoriel réel E de dimension $n \leq 3$. On se propose de déterminer la dimension de E pour qu'il existe un endomorphisme φ de E tel que $\varphi \circ \varphi = -\text{Id}_E$ (1) où Id_E désigne l'application identique de E .

1. Montrer que l'image par φ d'une droite vectorielle D est une droite vectorielle $\varphi(D)$, et que l'intersection de D et de $\varphi(D)$ est le vecteur nul (on pourra vérifier, \vec{u} étant un vecteur définissant D , que les réels α et β tels que $\alpha \vec{u} = \beta \varphi(\vec{u})$ sont nécessairement nuls compte-tenu de (1)). En déduire, si un tel endomorphisme existe, que $n \geq 2$.

2. D étant une droite vectorielle engendrée par le vecteur \vec{u} non nul, quelle est la dimension du sous-espace vectoriel F_D engendré par \vec{u} et $\varphi(\vec{u})$? Quelle est l'image de F_D par φ ?
3. Soit $n = 2$. \vec{u} étant un vecteur non nul de E , montrer, si φ existe et vérifie (1), que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}))$ est une base de E ; quelle est la matrice de φ dans cette base? Existe-t-il des endomorphismes de E , de dimension 2, vérifiant la condition (1)?
4. Soit $n = 3$. On suppose qu'il existe un endomorphisme φ de E vérifiant (1). \vec{u} étant un vecteur non-nul, montrer qu'il existe un vecteur \vec{v} tel que $(\vec{u}, \varphi(\vec{u}), \vec{v})$ soit une base de E . Compte-tenu de l'expression de $\varphi(\vec{v})$ dans cette base, quelle est la matrice de φ dans cette base? En déduire une contradiction. Que peut-on en conclure?

Partie B

P étant un espace affine associé à E espace vectoriel euclidien de dimension 2, on note $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P .

1. Déterminer, à l'aide des matrices, les endomorphismes φ de E tels que $\varphi \circ \varphi = -\text{Id}_E$. Préciser ceux qui sont orthogonaux.
2. Soit f_1 l'application de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

- a. Démontrer que f_1 est une rotation affine dont l'endomorphisme associé φ est tel que $\varphi \circ \varphi = -\text{Id}_E$.
Préciser le centre A et l'angle de f_1 .
 - b. Soit (Γ) le cercle de centre $B(0; 1)$ et de rayon 1. Déterminer l'image (Γ') de (Γ) par f_1 .
 - c. Soit I le milieu du segment $[M, M']$. Déterminer l'ensemble décrit par I lorsque M décrit (Γ) . (On pourra calculer les coordonnées de I ou définir géométriquement une application par laquelle I est image de M).
3. Soit f_2 l'application de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$$

- a. Démontrer que f_2 est une application affine dont l'endomorphisme associé φ est tel que $\varphi \circ \varphi = -\text{Id}_E$.
- b. Quel est l'ensemble des points invariants?
- c. Par quelle transformation passe-t-on de M à $M'' = f_2 \circ f_2(M)$?

- d. Soit la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x fait correspondre :

$$y = \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{3}.$$

Étudier cette fonction et la représenter dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle (C) la représentation graphique.

- e. Déterminer l'image (C') de (C) par f_2 . Tracer la dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ après avoir reconnu cette courbe (C') .

N. B. - Les parties A, B, C peuvent être traitées de façon indépendante.