

∞ Baccalauréat C Besançon juin 1977 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

On considère la fonction polynôme P de \mathbb{C} vers \mathbb{C} telle que :

$$P(z) = z^3 + 2(3 - 2i)z^2 + (8 - 15i)z + 3 - 11i.$$

1. z étant un réel, calculer, en fonction de z , la partie réelle et la partie imaginaire de $P(z)$.
En déduire l'existence d'un réel unique z_0 tel que $P(z_0) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des racines (réelles ou complexes) de l'équation $P(z) = 0$.

EXERCICE 2

5 POINTS

Dans l'espace affine euclidien E_3 rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P d'équation : $2x + y - z + 3 = 0$.

Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P .

1. M étant un point de E_3 de coordonnées $(a; b; c)$, déterminer les coordonnées $(a'; b'; c')$ du point M' image par s du point M .
2. On considère la droite D passant par O et de vecteur directeur \vec{u} :

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}.$$

Déterminer des équations paramétriques de la droite D' ensemble des images par s des points de D .

PROBLÈME

12 POINTS

N. B. - Les fonctions considérées dans ce problèmes sont des fonctions numériques d'une variable réelle

Partie A

1. Soit f la fonction de $[-\pi; +\pi]$ dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = x + \operatorname{tg} x.$$

- a. Étudier la variation de f .
- b. Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet, sur $[-\pi; +\pi]$, trois racines distinctes.
Soit x_1 la racine strictement positive. Démontrer que : $\frac{7\pi}{12} < x_1 < \frac{2\pi}{3}$.
(on vérifiera que : $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$)

2. Soit g la fonction définie sur $[-\pi ; +\pi]$ par : $g(x) = x \sin x$.
- Étudier la variation de g , et tracer la représentation graphique de g dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
 - Calculer l'aire de la partie du plan, ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\pi \leq x \leq +\pi \\ 0 \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

Partie B

1. Soit h la fonction définie sur $[-\pi ; +\pi]$ par :

$$h(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \text{ et } h(0) = 0.$$

- h est-elle continue sur $[-\pi ; +\pi]$?
 - h est-elle dérivable sur $[-\pi ; +\pi]$?
2. Soit k la fonction définie sur $[-\pi ; +\pi]$ par :

$$k(x) = x \sin x \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \text{ et } k(0) = 0.$$

- k est-elle continue sur $[-\pi ; +\pi]$?
 - k est-elle dérivable sur $[-\pi ; +\pi]$?
3. On considère la suite (U) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$U_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{p}{n^2} \sin \frac{p}{n} \sin \frac{n}{p}$$

Démontrer qu'elle est convergente, en faisant intervenir la valeur moyenne de k sur $[0 ; 1]$. (on ne calculera pas explicitement la valeur de cette limite).

Partie C

Soit φ la fonction définie sur $[-\pi ; +\pi]$ par :

$$\varphi(x) = \cos x \cos \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \text{ et } \varphi(0) = 0.$$

1. Montrer que φ est majorée et minorée sur $[-\pi ; +\pi]$ (on ne demande pas d'étudier la continuité de φ en 0).

Soit $t \in]0 ; \pi]$: montrer que φ est intégrable sur $[t ; \pi]$.

On pose alors $\Phi(t) = \int_t^\pi \varphi(x) dx$.

2. Soit ψ la fonction définie sur $]0; \pi]$ par :

$$\psi(x) = \frac{1}{x^2} \sin x \sin \frac{1}{x}.$$

Démontrer qu'il existe une fonction Ψ , définie sur $]0; \pi]$ par :

$$\Psi(t) = \int_t^\pi \psi(x) dx.$$

3. Préciser la fonction Ω définie sur $]0; \pi]$ par :

$$\Omega(t) = \Phi(t) + \Psi(t).$$

(on pourra utiliser une intégration par parties portant sur $\Phi(t)$).

4. On admet que $\Phi(t)$ tend vers une limite quand t tend vers 0.

Démontrer l'existence d'une fonction Ψ_1 définie et continue sur $[0; \pi]$ et qui coïncide sur $]0; \pi]$ avec la fonction Ψ .