

Baccalauréat C Besançon juin 1979

EXERCICE 1

4 POINTS

1. On considère, dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation $z^3 - i = 0$.

Donner chaque racine sous sa forme trigonométrique. Trouver la somme et le produit des deux racines qui ne sont pas imaginaires pures.

2. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $z^3 - i = 6(z + i)$.

EXERCICE 2

4 POINTS

On considère une fonction numérique f définie et continue sur $[0 ; +\infty[$ et la fonction G définie sur $[0 ; +\infty[$ par $G(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Justifier rapidement que G est dérivable sur $[0 ; +\infty[$. À quoi est égal $G'(0)$?
2. a. On considère la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} G(x) & \text{si } x > 0 \\ F(0) = f(0). \end{cases}$$

Démontrer que F est continue sur $[0 ; +\infty[$. (Pour démontrer la continuité de F au point 0, on pourra utiliser le fait que G est dérivable en 0.)

- b. Démontrer que, sur $[0 ; +\infty[$, F est dérivable et exprimer $F'(x)$ pour $x > 0$.
3. Déterminer F dans les cas suivants :

$$f(t) = t \sin t \quad ; \quad f(t) = \frac{2t + e^t}{t^2 + e^t}.$$

PROBLÈME

12 POINTS

Soit E l'espace vectoriel euclidien réel rapporté à la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (H) l'ensemble des vecteurs de E dont les coordonnées vérifient :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{où} \quad \vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Partie A

1. Soit r la rotation vectorielle de E d'axe \vec{k} et dont la restriction au plan vectoriel de base (\vec{i}, \vec{j}) a pour matrice dans cette base $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

Exprimer les coordonnées x', y', z' de $r(\vec{v})$ en fonction des coordonnées $(x ; y ; z)$ de \vec{v} appartenant à E .

2. Soit s l'endomorphisme de E défini analytiquement dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx - ay \\ z' = z \end{cases} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1$$

Vérifier que s est une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant \vec{k} .

Partie B

1. a. Soit \mathcal{I} l'ensemble des isométries vectorielles f conservant globalement (H) . Montrer que l'image $f(\vec{V})$ de coordonnées $(x'; y'; z')$ d'un vecteur \vec{V} de coordonnées $(x; y; z)$ de (H) est telle que $z' = z$ ou $z' = -z$.
 b. Soit P le plan d'équation engendré par \vec{i} et \vec{j} . Montrer que si f appartient à \mathcal{I} , f transforme un vecteur de P en un vecteur de P . En déduire que $f(\vec{k})$ vaut \vec{k} ou $-\vec{k}$.
2. \mathcal{I}_1 étant le sous-ensemble de \mathcal{I} des isométries telles que $z' = z$, quelle est la nature des éléments de \mathcal{I}_1 ? (On pourra classer ces isométries suivant le sous-espace de leurs invariants).
3. Soit \mathcal{I}_2 le complémentaire de \mathcal{I}_1 dans \mathcal{I} .
 a. On appelle δ la symétrie orthogonale par rapport au plan (\vec{i}, \vec{j}) . g étant une application quelconque de \mathcal{I}_2 , donner les natures à priori possibles $\delta \circ g$. (On regardera à quoi est égal $\delta \circ g(\vec{k})$).
 b. En déduire la nature des éléments de \mathcal{I}_2 .
4. a. Montrer que (\mathcal{I}, \circ) a une structure de groupe, \circ étant la loi de composition des applications.
 Ce groupe est-il commutatif?
 b. En est-il de même pour (\mathcal{I}_2, \circ) ?

Partie C

1. On considère l'application linéaire ψ de E dans E définie par

$$\begin{cases} \psi(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \\ \psi(\vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \psi(\vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \end{cases}$$

Vérifier que l'image de (H) par ψ est incluse dans (H) .

2. Soit \vec{V} de (H) à coordonnées entières. Que peut-on dire des coordonnées de $\psi(\vec{V})$?
3. Montrer qu'il existe une infinité de points de (H) dont les coordonnées sont des entiers naturels strictement supérieur à 1.