Baccalauréat C Besançon, Lyon juin 1981

EXERCICE 1 **3 POINTS**

On désigne par S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (1)

$$138x - 55y = 5.$$

1. Montrer que si $\left(x_0~;~y_0\right)$ est élément de S alors $x_0 \equiv 0 \quad (5)$.
2. Résoudre l'équation (1).
3. $\left(x_0~;~y_0\right)$ étant un élément de S, quelles sont les valeurs possibles du plus grand diviseur commun des deux termes du couple. Déterminer l'ensemble des éléments de S dont les termes sont premiers entre eux.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC, rectangle en A, tel que AC = 2AB = $2d$ (d réel strictement positif donné).

1. **a.** Construire le point G_1, barycentre des points pondérés (A, 1) (B, 2) (C, 1).
   b. Construire le point G_2, barycentre des points pondérés (A, 5) (B, 2) (C, -3).
   c. Calculer G_1G_2 en fonction de d.
2. **a.** Déterminer suivant la valeur du paramètre réel k la nature de l'ensemble

$$E_k = \left\{M \in \mathcal{P} / M\text{A}^2 + 2M\text{B}^2 + M\text{C}^2 = 4k\right\}$$

   b. Construire $E_{\frac{3}{2}d^2}$.
3. Étudier suivant la valeur du réel positif a la nature de l'ensemble

$$C_a = \{M \in \mathcal{P} / MG_1 + MG_2 = 2a\}.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

On désigne par I l'intervalle ouvert $]-1~;~1[$.

1. **a.** Vérifier que pour $s \in$ I et $t \in$ I

$$1 + st \neq 0.$$

   Pour toute la suite on pose

$$s \star t = \frac{s+t}{1+st} \text{ pour } s \in \text{I et } t \in \text{I}.$$

b. Soit $s \in$ fixé ; étudier les variations de la fonction $T_s : t \longmapsto s \star t$ sur I. En déduire que la loi $\star$ est interne dans I.

c. Montrer que I muni de la loi $\star$ est un groupe commutatif.

2. **a.** Donner le tableau de variations de la fonction G de $\mathbb{R}$ eh - 1 dans $\mathbb{R}$ qui à x associe

$$G(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

b. On pose $g(x) = x - G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$; calculer $g(0)$ et déterminer le sens de variation de g ; en déduire que $G(x) \leqslant x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

c. Démontrer que G est un isomorphisme de (R, +) sur (I, $\star$).

3. On note $H : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ l'application réciproque de G. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction F_a par $F_a(x) = ax$ et on considère la fonction $f_a = G \circ F_a \circ H$ de I vers I. On ne cherchera pas à calculer H et f_a dans cette question.

a. Montrer que pour $a \geqslant 0$, f_a est croissante sur I.

Soit a et b deux réels fixés.

b. Démontrer que pour tout $t \in$ I, on a

$$f_{a+b}(t) = f_a(t) \star f_b(t).$$

c. On suppose que $a \leqslant b$ et $t \in [0~;~1[$. En utilisant 2. a. montrer que $H(t) \geqslant 0$ et en déduire que $f_a(t) \leqslant f_b(t)$.

Partie B

À tout réel $a \geqslant 0$ on associe l'application $\varphi_a : [0~;~1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_a(t) & = & \dfrac{(1+t)^a - (1-t)^a}{(1+t)^a + (1-t)^a} \quad \text{si } a > 0 \\ \varphi_a(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que chaque fonction φ_a est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Quelle est la valeur de $\varphi_a(1)$?

b. Démontrer que $H(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,\dfrac{1+t}{1-t}$ pour tout $t \in$ I.

En déduire que pour tout $a \geqslant 0$ et tout $t \in [0~;~1[$ on a $f_a(t) = \varphi_a(t)$.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ on pose

$$J(a) = \int_0^1 \varphi_a(t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $J(0)$; $J(1)$; $J(2)$.

Montrer, en utilisant la question B 1. b. que la fonction $J : a \longmapsto J(a)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Quel est le signe de $J(a)$ pour $a \geqslant 0$?

3. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$.

a. Montrer que

$$\begin{array}{lll} \text{si } t \in [0\ ;\ 1-a] & \text{alors} & \varphi_a(t) \leqslant f_a(1-a), \\ \text{si } t \in]1-a\ ;\ 1] & \text{alors} & \varphi_a(t) \leqslant 1 \end{array}$$

b. En déduire, ainsi que de A 2. b., l'inégalité

$$J(a) \leqslant \frac{a}{2}\text{Log}\,\frac{2-a}{a} + a.$$

c. En déduire que J est continue à droite en 0.

4. **a.** Démontrer, à l'aide de A 3. b., que pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ on a

$$\varphi_{a+b}(t) \leqslant \varphi_a(t) + \varphi_b(t) \quad \text{pour tout } t \in [0\ ;\ 1].$$

En déduire que $J(a+b) \leqslant J(a) + J(b)$.

b. Montrer que la fonction J est continue à droite en tout point $a \geqslant 0$.