

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C 1985 Besançon¹ ☞

EXERCICE 1

5 points

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, A_0 le point d'affixe 6 et s la similitude de centre O , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
On pose $A_{n+1} = s(A_n)$ pour $n = 0, 1, \dots, 11$.

1. Déterminer en fonction de n l'affixe du point A_n et vérifier que A_{12} appartient à la demi-droite (O, \vec{i}) .
2. Établir que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} . Représenter les points A_0, A_1, \dots, A_{12} (on ne demande pas de calculer explicitement leurs coordonnées) et tracer les segments $OA_0, OA_1, \dots, OA_{12}$ et $A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{11} A_{12}$.
3. Calculer la longueur du segment $A_0 A_1$. En déduire la longueur ℓ de la ligne polygonale $A_0 A_1 A_2 \dots A_{12}$.
Donner une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

EXERCICE 2

5 points

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) et soient A et B deux points diamétralement opposés sur \mathcal{C} .

1. Pour tout point M de \mathcal{C} , distinct de A et B , on construit le point Q tel que $MABQ$ soit un parallélogramme.
Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment $[MQ]$, puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BMQ lorsque M décrit \mathcal{C} privé des points A et B .
2. On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM) .
Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB ?
Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble décrit par le point P lorsque M décrit \mathcal{C} privé des points A et B .
3. On considère les cercles circonscrits aux triangles OBP et MNP .
 - a. Pourquoi ces cercles ne sont-ils pas tangents en P ?
 - b. On note K l'autre point commun de ces deux cercles. En utilisant les angles orientés de droites égaux à $(\widehat{KB}, \widehat{KP})$ et $(\widehat{KP}, \widehat{KM})$, montrer que les points K, A, B, M sont cocycliques.

1. Besançon, Dijon, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

PROBLÈME**10 points**

Dans ce problème on étudie la famille de fonctions f_λ définies par :

$$f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$$

où λ est un nombre réel non nul.

La partie I est essentiellement consacrée à la recherche du nombre de points d'intersection de la courbe représentative \mathcal{C}_λ de f_λ , dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, avec la droite \mathcal{D} d'équation $y = x$. La partie II donne une méthode de calcul approché de l'abscisse de ces points dans le cas particulier où $\lambda = 1$.

I.

1. Donner l'ensemble de définition de f_λ (on distinguera les deux cas : $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$).
2.
 - a. Existe-t-il un lien entre les deux courbes \mathcal{C}_λ et $\mathcal{C}_{-\lambda}$?
 - b. Soit Γ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. Trouver, lorsque $\lambda > 0$, une translation qui transforme Γ en \mathcal{C}_λ .
3. On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.
 - a. On suppose $\lambda < 0$. Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition. En déduire le nombre de points d'intersection de \mathcal{C}_λ et \mathcal{D} .
 - b. On suppose $\lambda > 0$. Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes du domaine de définition (on pourra par exemple mettre x en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer la limite à l'infini).
Établir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$, quand x décrit le domaine de définition de φ_λ , est $m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \ln \lambda$.
 - c. Étudier, quand λ décrit $]0; +\infty[$, les variations de $m(\lambda)$; en déduire son signe.
 - d. Combien, lorsque λ est positif, \mathcal{C}_λ et \mathcal{D} ont-elles de points communs ?

II. Étude du cas particulier : $\lambda = 1$

1.
 - a. Représenter graphiquement la courbe \mathcal{C}_1 et la droite \mathcal{D} dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on prendra comme unité 3 cm.
 - b. On appelle P et Q les points d'intersection de \mathcal{C}_1 et de \mathcal{D} . P est le point d'abscisse négative p , Q le point d'abscisse positive q .
Démontrer que : $2 < q < 3$.
2. On se propose de calculer une valeur approchée de q . On définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & f_1(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- a. Représenter à l'aide de la courbe \mathcal{C}_1 les termes u_0, u_1, u_2 sur (O, \vec{i}) .

- b.** Montrer que la suite u est croissante et majorée par q .
- c.** Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité des accroissements finis, que :

$$q - u_{n+1} \leq \frac{q - u_n}{3} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

- d.** En déduire que, pour tout n de \mathbb{N} , $q - u_n \leq \frac{q - u_0}{3^n}$ et que la suite u converge vers q .
- e.** Déterminer une valeur approchée de q à 10^{-2} près en justifiant la méthode choisie.
- 3.** L'unité d'aire étant le cm^2 , calculer en fonction de p et de q l'aire comprise entre \mathcal{C}_1 et \mathcal{D} et les droites d'équations $x = p$ et $x = q$.