

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Besançon septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

Calculer le plus grand diviseur commun des nombres

$$5145, 4410 \text{ et } 3675.$$

Résoudre l'équation :

$$3675x - 5145y = 4410,$$

où x et y appartiennent à \mathbb{N} , ensemble des entiers naturels.

[On remarquera que $(x = 4 ; y = 2)$ est une solution particulière de l'équation,]

EXERCICE 2

Démontrer que la fonction $(ax + b)e^x$ admet une primitive de la forme $(mx + p)e^x$.

En déduire les primitives des fonctions

$$(x - 1)e^x \text{ et } (2x - 3)e^x.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

À tout nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$), on associe le point m de coordonnées x et y ; m est dit l'image de z ; z est dit l'affixe de m . On désigne par A, B, P, Q les images respectives des nombres $-1, +1, +\frac{1}{2}, +2$ et par (C) le cercle de diamètre [AB].

À tout point m différent de Q on associe son affixe, z , puis le nombre complexe

$$Z = \frac{(2z - 1)z}{z - 2}$$

et enfin l'image, M , de Z . On désigne par T l'application qui à m associe M .

1. On suppose que m parcourt le segment AB. En étudiant, dans l'intervalle $[-1 ; +1]$, la fonction f de la variable réelle x , donnée par

$$f(x) = \frac{(2x - 1)x}{2 - x},$$

trouver l'ensemble transformé du segment AB par T .

2. Démontrer que Z peut s'écrire sous la forme

$$Z = az + b + \frac{c}{z - 2}$$

a, b et c étant réels.

On pose $X = Z + iY$, X et Y étant réels. Calculer Y en fonction de x et y et en déduire l'ensemble des positions de m telles que M appartienne à $x'x$.

3. On pose $Z_1 = \frac{2z-1}{2-z}$. Démontrer que

$$|Z_1| = 2 \frac{mP}{mQ} \quad \text{et} \quad \text{Arg } Z_1 = \left(\overrightarrow{mQ}, \overrightarrow{Pm} \right).$$

4. Montrer que, si m est intérieur à (C) , c'est-à-dire si $|z| < 1$, alors $|Z_1| < 1$ et M est aussi intérieur à (C) , puis que, si m est extérieur à (C) , alors M est extérieur à (C) .

5. On suppose que m appartient au demi-cercle (C') de diamètre AB qui contient l'image de i . On désigne par θ l'argument de z ($0 \leq \theta \leq \pi$) et par φ l'argument de Z_1 . Montrer que $\sin \varphi \geq 0$.

On suppose $0 \leq \varphi \leq \pi$. Calculer $\cos \varphi$ en fonction de $\cos \theta$ et en déduire que φ est une fonction croissante de θ .