

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Besançon¹ septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

Un joueur lance n fois une pièce non truquée. Il reçoit 1 franc chaque fois qu'il obtient pile et il perd 1 franc chaque fois qu'il obtient face.

Soit y un entier relatif compris entre $-n$ et n .

Quelle est la probabilité pour que son gain à l'issue des n coups soit égal à y ? (il est bien sûr entendu qu'un gain négatif correspond à une perte d'argent).

EXERCICE 2

Soit p et q deux nombres réels strictement positifs tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Montrer que p et q sont strictement supérieurs à 1.
2. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = ax - \frac{x^q}{q},$$

où a est un réel strictement positif, et calculer la valeur de son maximum.

Indiquer l'allure de la courbe représentative de g .

3. En déduire que pour tous nombres réels positifs a et b , on a :

$$ab \leq \frac{a^q}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité?

PROBLÈME

Soit \mathcal{V} un espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 rapporté à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Étant donné deux nombres réels a et b , on désigne par $\varphi_{a,b}$ l'endomorphisme de \mathcal{V} défini par

$$\begin{cases} \varphi_{a,b}(\vec{i}) &= (a-b)\vec{i} + b\vec{j} \\ \varphi_{a,b}(\vec{j}) &= b\vec{i} + (a-b)\vec{j} \\ \varphi_{a,b}(\vec{k}) &= \vec{k} \end{cases}$$

1. Nancy - Reims et Strasbourg

Partie A

1. Montrer que $\varphi_{a,b}$ est bijectif si et seulement si $a(a-2b) \neq 0$.
2. Déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{a,b}$ lorsque $a(a-2b) = 0$ (on distinguera trois cas).
Montrer que dans tous les cas ce noyau et cette image sont supplémentaires.
3. Pour quelles valeurs de a et b l'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ est-il une isométrie vectorielle? Soit G_y l'ensemble de ces isométries :
 - a. Caractériser les éléments de G_y .
 - b. Dresser la table de composition des éléments de G_y . Qu'en déduisez-vous, quant à la structure de (G_y, \circ) ?

Partie B

On considère désormais le cas particulier $a = 2, b = 3$ et l'on pose $\varphi = \varphi_{2,3}$.

1. Montrer qu'il existe des vecteurs \vec{e}_1, \vec{e}_2 et des nombres réels λ_1, λ_2 tels que
 - i) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ est une base orthonormée de \mathcal{V}
 - ii) $\varphi(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1$ et $\varphi(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2$
 - iii) $\lambda_1 > \lambda_2$
 On montrera que ces conditions déterminent λ_1, λ_2 de manière unique; en est-il de même pour \vec{e}_1 et \vec{e}_2 ?
Montrer enfin que si l'on impose la condition supplémentaire :
 - iv) $\vec{e}_1 \cdot \vec{i} > 0$ et $\vec{e}_2 \cdot \vec{i} > 0$
 les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont alors uniques. Les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 seront ainsi choisis dans ce qui suit.
2. Soit ϵ un espace affine euclidien dont \mathcal{V} est l'espace vectoriel euclidien associé et $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$ un repère cartésien de ϵ .
On considère l'application affine f qui laisse O invariant et dont l'endomorphisme d'espace vectoriel associé est φ .
 - a. Pourquoi f est-elle une application affine bijective?
 - b. Déterminer analytiquement f et caractériser par une relation entre leurs coordonnées $(x; y; z)$ l'ensemble C des points M de ϵ tels que \vec{OM} et $\vec{Of}(M)$ soient orthogonaux.
 - c. Reconnaître et donner les principales caractéristiques de l'intersection de C et du plan d'équation $z = \alpha$.
 - d. Même question pour l'intersection de C et du plan d'équation $y = \beta$.