Durée : 4 heures

Baccalauréat C Besançon - Dijon septembre 1987

EXERCICE 1 — 5 points

1. Dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point G_t de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t))$ où

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{1}{3}(\cos 2t + 2\cos t),\\ y(t) & = & \dfrac{1}{3}\sin 2t.\end{array}\right.$$

   Pour tout t réel, comparer $G_{t+2\pi}$ et G_t, puis G_{-t} et G_t.
2. Étudier les variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
3. Tracer la courbe (Γ), ensemble des points G_t.
   En particulier, on aura soin de préciser les points de contact des tangentes parallèles à l'un des axes de coordonnées (l'unité est 9 cm).

EXERCICE 2 — 5 points

1. Soit h la fonction définie par
$$h(x) = x^2 \cdot \text{e}^{-x}.$$
   On pose $K = \displaystyle\int_0^1 h(x)\,\text{d}x$.
   Montrer que $K = 2 - \dfrac{5}{\text{e}}$ (on pourra utiliser la méthode d'intégration par parties ou chercher une primitive H de h sous la forme :
$$H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\text{e}^{-x}$$
   où a, b, c sont des réels à déterminer).
2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2 \cdot \text{e}^{-x}}.$$
   On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$. (On ne cherchera pas à calculer I)
   a. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $0 \leqslant x^2 \cdot \text{e}^{-x} \leqslant 1$.
   Vérifier que pour tout u de l'intervalle $[0 ; 1]$
$$1 - u \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1 - \frac{u}{2}.$$
   b. En déduire que $1 - K \leqslant 1 \leqslant 1 - \dfrac{K}{2}$; donner un encadrement de I d'amplitude égale à 0,1.