

∞ Baccalauréat C Besançon¹ septembre 1977 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

1. Trouver deux constantes a et b telles que l'on ait :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z} \quad 9k + 4 &= a(2k - 1) + k + 8 \\ \text{et} \quad 2k - 1 &= b(k + 8) - 17. \end{aligned}$$

2. En déduire que :

- a. Si $k = 9(\text{mod } 17)$ alors $\text{pgcd}(9k + 4, 2k - 1) = 17$,
- b. Si $k \neq 9(\text{mod } 17)$ alors $\text{pgcd}(9k + 4, 2k - 1) = 1$.

EXERCICE 2

4 POINTS

1. x étant un réel supérieur à e^2 , calculer

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \int_e^x \frac{1}{t \text{Log } t} dt, \quad \int_{e^2}^x \frac{1}{t \text{Log } t \text{Log}(\text{Log } t)} dt.$$

Étudier leur comportement quand x tend vers $+\infty$.

2. (t étant un réel strictement positif, et x un réel supérieur à e , on pose :

$$I_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt, \quad J_\alpha(x) = \int_e^x \frac{1}{t(\text{Log } t)^\alpha} dt.$$

Pour quelles valeurs de α , $I_\alpha(x)$ admet-il une limite finie quand x tend vers $+\infty$?

Qu'en est-il alors de $J_\alpha(x)$?

PROBLÈME

12 POINTS

E désigne un espace vectoriel réel de dimension trois, et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E .

On rappelle que $\mathcal{L}(E)$, muni des deux opérations : addition et multiplication par un réel, est un espace vectoriel réel (l'application nulle est notée 0), On peut aussi munir $\mathcal{L}(E)$ de la composition (au sens des applications) : on posera

$$f^2 = f \circ f.$$

I désigne l'application identique de E .

Soient a et c deux réels, $a \neq 0$, et P l'application de $f(E)$ dans $f(E)$:

$$f \longmapsto P(f) = f^2 + af + cI.$$

Partie A

1. Dijon - Nancy - Reims - Strasbourg

1. P est-elle une application linéaire?
2. Montrer que si le trinôme $x^2 + ax + c$ a une racine réelle, alors il existe au moins une application f de $\mathcal{L}(E)$ telle que $P(f) = 0$.
3. Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$.
Montrer que si $c \neq 0$, f est bijective et déterminer alors son inverse.
Peut-on avoir $c = 0$ et f bijective?

Partie B

Dans cette partie on suppose $c = 0$; $\ker f$ et $\text{Im } f$ désignent respectivement le noyau de f et l'image de E par f .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $P(f) = 0$.

1. En écrivant tout vecteur x de E sous la forme $x = x' + x''$ avec $x' = x + \frac{1}{a}f(x)$, vérifier que $x' \in \ker f$ et $x'' \in \text{Im } f$.
Montrer que E est somme directe de $\ker f$ et $\text{Im } f$.
2. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ et $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.
3. Montrer que $\text{Im } f$ est stable par f et préciser la restriction de f à $\text{Im } f$.
4. Calculer f^n en fonction de f ($f^n = f \circ f^{n-1}$ par définition).

Partie C

Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $P(f) = 0$.

1. Montrer que si f est involutif, alors $|a| = |c + 1|$.
2. On se propose de vérifier, par un contre-exemple, que cette condition n'est pas suffisante pour que f soit involutif.
 E étant le plan vectoriel, soit f un endomorphisme de E différent de l'identité tel que $f^2 - 2f + I = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $f(x) \neq x$, et vérifier que $(x; f(x))$ est un système libre.
En posant $u = f(x) - x$, montrer que $(u; x)$ est une base de E et expliciter la matrice de f dans cette base.
Que peut-on conclure?

N. B. les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendantes.