

♣ Baccalauréat Besançon septembre 1979 ♣

EXERCICE 1

Soient u, v et α trois nombres réels. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on affecte les quatre points

$$A_1 = (1; 0) \quad ; \quad A_2 = (0; 1) \quad ; \quad A_3 = (-1; 0) \quad ; \quad A_4 = (0; -1)$$

respectivement des coefficients

$$m_1 = \alpha \cos^2 \frac{u}{2}, \quad m_2 = (1 - \alpha) \cos^2 \frac{v}{2}, \quad m_3 = \alpha \sin^2 \frac{u}{2}, \quad m_4 = (1 - \alpha) \sin^2 \frac{v}{2}.$$

1. Quelles sont les coordonnées de leur barycentre G?
2. α étant fixé, on suppose que u et v varient de façon que $u + v = \frac{\pi}{2}$; Indiquer la nature géométrique de l'ensemble parcouru par le point G, et représenter graphiquement cet ensemble pour $\alpha = 1/2$ et $\alpha = 1/4$.

EXERCICE 2

On admettra que le nombre 1979 est premier.

Les éléments de $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$ seront notés $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{1978}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$ l'équation $\bar{2}x = \bar{1}$.
2. On considère l'équation

$$(1) x^2 - x + \overline{494} = \bar{0}.$$

Si x est solution de (1), calculer $(x - \overline{990})^2$.

En déduire les solutions de (1).

PROBLÈME

Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, on considère le sous-espace vectoriel E engendré par les fonctions u_1, u_2, u_3 définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par les formules :

$$\begin{cases} u_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x}; \\ u_2(x) &= e^{-x} \cos x; \\ u_3(x) &= e^{-x} \sin x. \end{cases}$$

Si f et g appartiennent à E, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)e^{2t} dt.$$

Partie A

1. Calculer les six intégrales $\langle u_1, u_2 \rangle$; $\langle u_1, u_3 \rangle$; $\langle u_2, u_3 \rangle$; $\langle u_1, u_1 \rangle$; $\langle u_2, u_2 \rangle$; $\langle u_3, u_3 \rangle$.
2. Montrer que l'application qui, à tout couple (f, g) d'éléments de E , associe le nombre $\langle f, g \rangle$, est un produit scalaire sur E , et que (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de l'espace euclidien E ainsi défini.
Dans la suite du problème, cette base sera considérée comme directe, ce qui oriente l'espace E .

Partie B

Soit D l'application qui, à tout f appartenant à E , associe la fonction $Df = f'$ dérivée de f .

1. Montrer que D applique E dans E .
2. Est-ce que D est une isométrie de E ?

Partie C

1. Soit h un nombre réel donné. Soit $f = au_1 + bu_2 + cu_3$ un élément quelconque de E , où a, b, c sont des nombres réels.
Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = f(x-h)$ peut s'écrire $g = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3$, où a', b', c' sont trois nombres réels qu'on calculera en fonction de a, b, c et de h .
2. On a ainsi défini une application linéaire T_h de E dans E , celle qui transforme f en g . Montrer que T_h est la composée d'une homothétie vectorielle, dont on précisera le rapport, et d'une rotation de E , dont on précisera les éléments.

Partie D

1. Calculer les trois intégrales

$$v_i(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} u_i(t) dt$$

où $i = 1, 2, 3$.

(Nota Bene : pour calculer v_2 et v_3 on pourra intégrer deux fois par parties).

2. En déduire que, pour tout f appartenant à E , la fonction

$$x \mapsto F(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) dt$$

appartient à E .

On note L l'application linéaire de E dans E qui transforme f en F .

3. Soit P le plan vectoriel engendré dans E par u_2 et u_3 . Quelle est l'image de P par L ?
4. Montrer que l'application L est bijective de E sur E .