

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1981 Besançon¹ ∞

EXERCICE 1

Soit $(a; b)$ un couple d'entiers naturels non nuls; on note m leur plus petit commun multiple et d leur plus grand commun diviseur.

Exprimer, à l'aide de d , les couples $(a; b)$ tels que

$$\begin{cases} b - a & = & d \\ b^2 - a^2 & = & m - d^2. \end{cases}$$

EXERCICE 2

1. Soit P un plan vectoriel rapporté à la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Pour tout réel λ , on note f_λ l'application de P dans P qui fait correspondre au vecteur \vec{u} de coordonnées $(x; y)$ le vecteur \vec{u}' de coordonnées $(x'; y')$ définies par

$$\begin{cases} x' & = & \lambda x + (1 - \lambda)y \\ y' & = & (1 + \lambda)x - \lambda y. \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout réel λ , f_λ est un endomorphisme involutif que l'on précisera.

2. Soit $g_\lambda = f_\lambda \circ f_\lambda$.

Démontrer que $g_\lambda = \text{Id}_P + \lambda \cdot h$, où h désigne un endomorphisme tel que $h \circ h$ est l'application nulle.

Soit $G = \{g_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que l'ensemble G , muni de la loi de composition des applications est un groupe isomorphe à \mathbb{R} muni de l'addition.

EXERCICE 2

Partie A

On appelle f la fonction numérique de la variable réelle x , définie sur \mathbb{R} , par

$$f(x) = 2e^{2x} - e^x$$

où e représente la base du logarithme népérien.

1. Déterminer les variations de la fonction f .

Etudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Construire la représentation graphique (\mathcal{C}) de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(Unité : 4 cm.)

Préciser le point d'intersection de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses.

1. Grenoble, Dijon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg

2. Soit t un réel inférieur à $\text{Log } \frac{1}{2}$. Calculer, en cm^2 , l'aire $a(t)$ du domaine plan \mathcal{D}_t , défini par

$$\begin{cases} t & \leq x \leq \text{Log } \frac{1}{2} \\ f(x) & \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Déterminer $\lim_{t \rightarrow -\infty} a(t)$.

3. Soit $I = \left[\text{Log } \frac{1}{4}; +\infty \right[$.

- a. On appelle g l'application de I dans $f(I)$ qui, à x , associe $g(x) = f(x)$. Justifier l'existence de g^{-1} , application réciproque de g . Pour x élément de $f(I)$, expliciter $g^{-1}(x)$.
- b. Construire la représentation graphique (Γ) de g^{-1} dans le même repère que (\mathcal{C}) . En déduire l'aire en cm^2 du domaine défini par

$$\begin{cases} -\frac{1}{8} & \leq x \leq 0 \\ \text{Log } \frac{1}{4} & \leq y \leq g^{-1}(x) \end{cases}$$

4. Démontrer que, pour tout réel x_0 , strictement supérieur à $\left(-\frac{1}{8}\right)$ l'équation

$$\left(x_0 + \frac{1}{8}\right) g^{-1}(x) = \int_{-\frac{1}{8}}^{x_0} g^{-1}(t) dt,$$

d'inconnue réelle x , admet une solution unique comprise entre $\left(-\frac{1}{8}\right)$ et x_0 .

Partie B

Soit n entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction numérique de la variable réelle x , définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^n (-1)^p p e^{px}.$$

1. Démontrer que la primitive F_n de f_n qui s'annule pour $x = 0$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \frac{(-1)^n e^{(n+1)x} - e^x}{1 + e^x} + \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

2. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{(n+2)x} + (-1)^n (n+1) e^{(n+1)x} - e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

3. Soit u la suite définie pour tout entier naturel n , non nul, par

$$u_n = \sum_{p=1}^n (-1)^p \frac{p}{n^p}.$$

En utilisant ce qui précède, montrer que

$$u_n = \frac{(-1)^n \frac{n+2}{n^{n+1}} - \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Dans tout le problème la notation $\text{Log } x$ représente le logarithme népérien du réel x .