

∞ **Baccalauréat Besançon juin 1951** ∞
Série mathématiques

Exercice 1

1^{er} sujet. - Résoudre et discuter l'équation

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

2^e sujet. - Établir les relations

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

entre les éléments d'un triangle.

3^e sujet. Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.

Exercice 2

Soit une parabole (P). On appelle O le sommet, Ox l'axe, Dy la tangente au sommet, p le paramètre, F le foyer, D la directrice, A la projection de O sur D.

Un point M se déplace sur CP) de telle manière que sa projection H sur D ait un mouvement uniforme de vitesse p et se trouve en A au temps zéro.

1. Calculer les coordonnées x, y de M au temps t , les projections de son vecteur vitesse MV et de son vecteur accélération M γ sur les axes.
2. On fait tourner MV d'un angle droit autour de M, dans le sens de Dy vers Ox. Le point V vient en N. Démontrer que N est sur Ox. En déduire une propriété connue de la sous-normale de la parabole.
3. Soit r la distance FM. Démontrer que la vitesse v de M vaut $\sqrt{2pr}$.
4. On appelle $\frac{1}{h}$ le temps que mettrait un point pour parcourir le segment AF d'un mouvement uniforme ayant la vitesse v du point M au temps t . On pose

$$t_1 = t + h, \quad t_2 = t - h$$

et l'on appelle M_1 et M_2 les positions de M aux temps t_1 et t_2 , v_1 , et v_2 les vitesses correspondantes. Calculer la distance M_1M_2 .

En déduire que la corde M_1M_2 passe par F.

Démontrer que

$$v_1^2 + v_2^2 = 4v^2$$

et que M_1V_1 et M_2V_2 sont perpendiculaires.

5. Soit I le milieu de M_1M_2 . On appelle K la position de M au temps $2t$. Démontrer que I est homologue de K dans une homothétie de centre et de rapport fixes, que l'on déterminera.

En déduire la trajectoire de I.

6. On appelle Q le point de rencontre de D avec la tangente en M à (P).
Calculer son ordonnée Y et sa vitesse w . Vérifier que $y^2 = 4wx$.
Démontrer que les points Q_1 et Q_2 correspondant à M_1 et M_2 sont tous deux en H et que FH est perpendiculaire à M_1M_2 .

N. B. - Le problème sera noté sur 20, la question de cours sur 10.

SÉRIE MATHÉMATIQUES ET TECHNIQUE

Exercice 1

1^{er} sujet. - Limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0; application à la dérivée de $\sin x$.

2^e sujet. - Résoudre par deux méthodes différentes l'équation

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1,75$$

(on calculera les racines avec la précision que permet la règle à calcul).

3^e sujet. - Transformation en produits d'une somme ou d'une différence de deux sinus ou de deux cosinus.

Exercice 2

Soient deux axes de coordonnées $x'Ox$ et $y'Oy$; un cercle tangent à $x'Ox$ en T se déplace de telle façon que son centre I décrive la droite $y = a$, a est un nombre positif.

- La deuxième tangente au cercle I, issue de O, rencontre IT en A. On pose $\overline{OT} = x$, $\overline{TA} = y$ et l'on repère I par l'angle $(Ox, OI) = \varphi$.
Exprimer x et y en fonction de φ ; en déduire une relation entre y et x , que l'on mettra sous la forme $y = f(x)$.
Variation de la fonction ainsi définie; tracer la courbe représentative; lieu du point A, en supposant $a = 1$ cm.
- Une droite variable, d'équation $y = mx$ (où m est un paramètre), rencontre la courbe précédente en deux points M et N autres que O.
Trouver l'abscisse, puis l'ordonnée du milieu de MN en fonction de m ; en déduire le lieu de ce point.
Construire géométriquement les points M et N; retrouver le lieu du milieu de MN.
- On se limite maintenant aux valeurs de x supérieures à a .
La deuxième tangente au cercle I menée du point A rencontre Ox en B. Exprimer le rayon R du cercle circonscrit au triangle AOB en fonction de φ , puis de x .
Calculer x et φ lorsque $R = 3a$. (On se contentera de la précision de la règle à calcul.)