

Le candidat doit traiter obligatoirement les deux exercices et le problème.

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Besançon juin 1971 ∞

Exercice 1

Montrer que, quel que soit l'entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre entier $A = n(n^6 - 1)$ est divisible par 7.

Quel est le reste de la division par 7 du nombre :

$$N = 96^{3^{129}}$$

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \text{Log} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Donner son ensemble de définition.

Déterminer sa fonction dérivée f' .

En déduire le sens de variation de f , et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

La fonction f admet une fonction réciproque $g = f^{-1}$ définie sur \mathbb{R} ; exprimer pour u réel, $g(u)$ en fonction de u , à l'aide de la fonction exponentielle.

Problème

Le plan orienté (\mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé \mathcal{R} d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$.

Étant donné une constante réelle λ , on désigne par T_λ la transformation ponctuelle qui au point M de coordonnées x et y fait correspondre le point M' , image de M , de coordonnées x' et y' définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x' &= (1 + \lambda)x - \lambda y \\ y' &= \lambda x + (1 - \lambda)y \end{cases}$$

1. a. Montrer que T_λ est une bijection du plan sur lui-même et montrer que l'application réciproque $(T_\lambda)^{-1}$ de T_λ est $T_{-\lambda}$. Peut-on choisir λ pour que T_λ soit involutive?

b. Quel est l'ensemble des points invariants dans la transformation T_λ , c'est-à-dire des points M confondus avec leur images M' ?

M étant un point quelconque du plan, et M' son image par T_λ , quelle est la direction du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ lorsqu'il n'est pas nul?

2. a. Montrer que l'ensemble des images des points d'une droite (d) est une droite (d').

- b.** Déterminer les droites (d) qui sont confondues avec leur transformées (d') .
Montrer que si (d) et (d') ne sont pas confondues, elles se coupent en un point appartenant à la première bissectrice des axes.
- 3.** On désigne par \mathcal{T} l'ensemble des transformations T_λ obtenues lorsque λ décrit \mathbb{R} .
Déterminer l'application composée $T_{\lambda'} \circ T_\lambda$ des éléments T_λ et $T_{\lambda'}$ de \mathcal{T} pour la loi de composition des applications.
On trouvera : $T_{\lambda'} \circ T_\lambda = T_{\lambda+\lambda'}$
Déduire des résultats précédents que la loi de composition des applications confère à \mathcal{T} une structure de groupe commutatif et trouver un isomorphisme entre le groupe additif \mathbb{R} (ensemble des réels muni de l'addition) et ce groupe.
- 4.** On considère un nouveau repère orthonormé \mathcal{R}' : les axes $X'OX$ et $Y'OY$ de ce repère sont déduits de $x'Ox$ et $y'Oy$ respectivement, par rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{4}$.
Écrire les relations donnant les coordonnées $(x; y)$ d'un point M dans le repère \mathcal{R} en fonction de ses coordonnées $(X; Y)$ dans le repère \mathcal{R}' et celles donnant les coordonnées $(X; Y)$ dans \mathcal{R}' en fonction des coordonnées (x, y) du même point M .
En déduire les relations définissant dans \mathcal{R}' les coordonnées $(X'; Y')$ du point M' , image dans la transformation T_λ du point M , en fonction des coordonnées $(X; Y)$ dans le même repère \mathcal{R}' .
Étant donné une parabole (p) de sommet O d'axe OX , montrer alors que sa transformée par T_λ est une parabole (p'_λ) d'axe parallèle à OX , dont on déterminera le sommet S_λ .