Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Bordeaux juin 1969 ∾

EXERCICE 1

1. Soit la fonction f définie, sur l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0, \\ f(x) & = & x\text{Log}\, x \quad \text{si}\, x > 0, \end{array}\right.$$

où Log x représente le logarithme népérien du nombre x.
Etudier les variations de la fonction f, tracer la courbe (C) représentant ces variations et déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

2. Calculer la dérivée de la fonction g définie, sur l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, par

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(0) & = & 0, \\ g(x) & = & x^2\text{Log}\, x - \dfrac{x^2}{2} \;\text{si}\, x > 0. \end{array}\right.$$

Soit h la fonction définie, sur l'ensemble des nombres réels positifs ou nul, par

$$h(x) = \left|f(x)\right|.$$

Soit (C$'$) la courbe représentant les variations de la fonction h. Trouver l'aire de la boucle déterminée par les courbes (C) et (C$'$).

EXERCICE 2

Montrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$3^{3n+2} + 2^{n+4} = 0 \pmod 5.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé, $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$. Soit $\mathcal{J}$ l'inversion de pôle O et de puissance 9 et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des cercles du plan qui coupent $x'\text{O}x$ en deux points, M et M', inverses dans $\mathcal{J}$.

1. Montrer que tout cercle de $\mathcal{E}$ est orthogonal à un cercle fixe, (O), qui coupe l'axe $x'x$ en A et B (l'abscisse de A étant supérieure à celle de B).
Déterminer l'ensemble des centres des cercles de $\mathcal{E}$.
Soit l'équation

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit celle d'un cercle de la famille $\mathcal{E}$ est $c = 9$ et $a \geqslant 9$.

2. Soit (D_1) une droite non parallèle à $y'\text{O}y$ et $\mathscr{E}_1$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ des cercles centrés sur (D_1). Montrer que $\mathscr{E}_1$ est contenu dans un faisceau linéaire de cercles.
3. Soit (D2) la droite d'équation $y = 1$ et $\mathscr{E}_2$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ des cercles tangents à la droite (D_2).

   Montrer, à l'aide de l'inversion $\mathscr{J}$, que les cercles de $\mathscr{E}_2$ sont tangents à un cercle fixe, (Γ), dont on précisera le centre et le rayon.

   Trouver une condition concernant a, b et c pour que l'équation (1) soit celle d'un cercle de $\mathscr{E}_2$. En déduire l'ensemble des centres des cercles de $\mathscr{E}_2$.
4. Soit $\mathscr{E}_3$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ des cercles tangents au cercle (C), de rayon 1, dont le centre a pour coordonnées $(0\,;\,+2)$.

   Montrer, à l'aide de l'inversion $\mathscr{J}$, que les cercles de $\mathscr{E}_3$ sont tangents à un cercle, (C'), dont on précisera le centre et le rayon.

   Trouver une relation entre a et b pour que l'équation (1) soit celle d'un cercle de $\mathscr{E}_3$. En déduire l'ensemble des centres des cercles de $\mathscr{E}_3$, [Il pourra être utile d'effectuer une translation du repère, la nouvelle origine étant le point $(0\,;\,+4)$.]

N. B. - Les questions 2., 3. et 4. sont indépendantes entre elles.