

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Bordeaux juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Résoudre

1. dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation

$$x^2 + x + 6 = 0,$$

2. dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ le système

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x + 5y = 2. \end{cases}$$

EXERCICE 2

Soit un carré (ABCD); déterminer un ensemble de trois nombres réels a , b et c pour que le point O, milieu du côté [AD], soit barycentre de A, B et C affectés des coefficients a , b et c . (On pourra choisir un système d'axes.)

Déterminer l'ensemble des points, M , du plan du carré tels que

$$2\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = 0.$$

PROBLÈME

Dans tout l'énoncé le symbole e désigne la base du logarithme népérien.

Partie A

Dans tout ce paragraphe, x désigne un nombre réel et t une variable réelle.

1. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que l'on a

$$\int_0^x te^t dt = xe^x - \int_0^x e^t dt.$$

En déduire, par un calcul de l'intégrale $\int_0^x (x-t)e^t dt$, que

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t dt.$$

2. On considère l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer l'égalité

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

3. Démontrer par récurrence sur n la formule

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Partie B

On pose

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

$$\text{et } J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n e^t dt.$$

1. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, on considère $H = ae + b + ce^{-1}$.

Dans les deux premières questions, on suppose $|a| + |c| \neq 0$.

a. Démontrer que l'on a

$$n!H = n![aP_n(1) + b + cP_n(-1)] + aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n.$$

b. Démontrer que l'on a

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \quad \text{et} \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite de $h(n) = aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n$ quand n augmente indéfiniment.

c. Démontrer que

$$Q_n = n![aP_n(1) + b + cP_n(-1)]$$

est un nombre entier relatif.

Démontrer que, pour tout entier n , avec $n > 1$, on a

$$Q_n \equiv a + (-1)^n c \pmod{n}.$$

2. Si l'on a $|a| \neq |c|$, démontrer que l'on peut trouver un entier n_0 tel que, pour tout entier n vérifiant $n > n_0$, Q_n n'est pas nul.

En déduire qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $Q_n \neq 0$.

3. a. Démontrer, en utilisant en particulier la question B 1. b., que H ne peut être nul que si $a = b = c = 0$.

b. \mathbb{Q} désignant l'ensemble des nombres rationnels, démontrer que e ne peut pas être racine d'une équation du second degré à coefficients dans \mathbb{Q} .