

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Bordeaux ∞

EXERCICE 1

On considère la suite récurrente  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{u_{n-1} + 5}{3}$  et la suite  $(v_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $v_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{3}$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  ( $v_n = \frac{1}{3^n}$ ); on ne cherchera pas dans cette question à calculer  $u_n$ .
2. Soit  $(S_p)$  la suite dont le terme général est la somme des  $p$  premiers termes de la suite  $(v_n)$ .
  - a. Montrer que  $(S_p)$  est convergente et trouver sa limite.
  - b. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et trouver sa limite.
3. On partage l'intervalle  $[0; a]$  où  $a > 0$  en intervalles partiels de même amplitude égale à  $av_n$ .

Calculer  $\int_0^a x^3 dx$  en considérant cette intégrale comme la limite pour  $n$  tendant vers l'infini d'une somme de Riemann  $\sigma_n$  relative à la subdivision de  $[0; a]$  considérée.

(On pourra prendre  $\sigma_n = av_n \sum_{k=1}^{k=3^n} (kav_n)^3$ ;  $v_n = \frac{1}{3^n}$ ).

On rappelle que la somme des cubes des  $n$  premiers nombres entiers est égale à  $\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ .

EXERCICE 2

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = e^x + x[\text{Log}(x) - e - 1], \quad \forall x > 0 \end{cases}$$

1. Étudiez la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0.
2. En étudiant le signe de la dérivée seconde de  $f$ , étudiez les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$  (on calculera  $f'(1)$ ).
3. Tracez une représentation graphique de la fonction  $f$ .

II.

Dans le plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la similitude  $S$  de centre  $O$ , d'angle  $\theta$ , ( $\theta \neq 2k\pi$ ) de rapport  $r$ , et la rotation  $R$  de centre  $A$  (de coordonnées  $(1, \sqrt{3})$ ) et d'angle  $\varphi$  ( $\varphi \neq 2k\pi$ ).

1. Montrer que les transformations d'une même figure ( $F$ ) par le produit  $R \circ S$  et par le produit  $S \circ R$  se déduisent l'une de l'autre par une translation.
2. On donne  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ .  
Déterminer  $r$  de façon que le vecteur définissant la translation du 1. soit orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$ .  
(Toute forme de solution est acceptée : géométrique, par les complexes...)

### III.

A) On appelle  $\mathcal{E}$  l'ensemble des suites numériques (applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  notées  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Si l'on considère sur  $\mathcal{E}$  les lois suivantes

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}, \forall (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}, \quad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

$(\mathcal{E}, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\vec{0}$  l'élément neutre.

Dans la suite,  $\mathcal{F}$  désigne l'ensemble des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_n = 0.$$

1° Vérifier que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$ .

Montrer que l'application  $\varphi$  de  $\mathcal{F}$  vers  $\mathbb{R}^2$  qui à la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  associe le couple  $(u_0, v_0)$  est une application linéaire bijective. En déduire la dimension de  $\mathcal{F}$ .

2° Soit  $\vec{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\vec{v} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux éléments de  $\mathcal{F}$ . Montrer que  $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$  dans  $\mathcal{F}$  équivaut à

$$\lambda u_0 + \mu v_0 = 0, \quad \lambda u_1 + \mu v_1 = 0.$$

En déduire que  $(\vec{u}, \vec{v})$  est une partie libre de  $\mathcal{F}$  si, et seulement si  $u_0 v_1 - u_1 v_0 \neq 0$ .

3° a) Soit  $r$  un réel non nul. Montrer que la suite  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $\mathcal{F}$  si, et seulement si  $2r^2 - 3r - 2 = 0$ .

b) En déduire l'existence dans  $\mathcal{F}$  de deux suites du type précédent qu'on notera  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ . Montrer que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $\mathcal{F}$ .

c) En déduire la forme générale des éléments de  $\mathcal{F}$ . Déterminer ces éléments  $\vec{u}$  en fonction de  $u_0$  et de  $u_1$ .

B) Pour toute application  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , on note  $f^{(n)}$  la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  quand elle existe.

On appelle  $\mathcal{S}$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant

$$2f^{(2)} - 3f^{(1)} - 2f = \theta$$

(où  $\theta$  désigne l'application nulle).

1° Démontrer que  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .

Établir que les applications  $\varphi$  et  $\psi$  telles que

$$\varphi(x) = e^{2x} \quad \text{et} \quad \psi(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{R}$$

sont des éléments linéairement indépendants de  $\mathcal{S}$ .

Remarque : Il y avait déjà une application  $\varphi$  au A1° ...

2° Soit  $f$  appartenant à  $\mathcal{S}$ . Montrer que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $f^{(n)}$  appartient à  $\mathcal{S}$  pour tout entier  $n$ .

En déduire que  $f$  appartient à  $\mathcal{S}$  si, et seulement si  $f$  possède des dérivées de tous ordres et si pour tout réel  $x$  la suite de terme général  $f^{(n)}(x)$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

3° On veut montrer que  $\mathcal{S}$  est engendré par  $\varphi$  et par  $\psi$ .

Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{S}$ . Montrer que pour

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha f + \beta\varphi + \gamma\psi = \theta$$

implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha f^{(n)} + \beta\varphi^{(n)} + \gamma\psi^{(n)} = 0.$$

Quelle est la forme générale des éléments de  $\mathcal{S}$ ?