

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Bordeaux juin 1976 ∞

EXERCICE 1

Rechercher tous les couples $(z_1 ; z_2)$ de nombres complexes satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} z_1 z_2 & = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 & = \sqrt{3} \end{cases}$$

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenus.

EXERCICE 2

1. a. Montrer que la fonction numérique :

$$f : x \mapsto x \operatorname{Log} x - x$$

est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$.

b. Soit t un élément quelconque de l'intervalle réel $]0 ; 1]$. Montrer que la fonction : $x \mapsto \operatorname{Log} x$ est intégrable sur $[t ; 1]$. Calculer :

$$I(t) = \int_t^1 (\operatorname{Log} x) dx.$$

Montrer que la fonction : $t \mapsto I(t)$ admet une limite finie quand t tend vers zéro par valeurs positives.

Que vaut cette limite ?

2. Soit T un élément quelconque de l'intervalle réel $[1 ; +\infty[$. Montrer que la fonction : $x \mapsto \frac{\operatorname{Log} x}{x^2}$ est intégrable sur $[1 ; T]$. Calculer :

$$J(T) = \int_T^1 \frac{\operatorname{Log} x}{x^2} dx.$$

(On peut faire une intégration par parties).

Montrer que la fonction : $T \mapsto J(T)$ admet une limite finie quand T tend vers $+\infty$, que vaut cette limite ?

PROBLÈME

Partie A

Soit a un nombre réel donné non nul. Soit A l'ensemble des applications φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivables en tout point, et satisfaisant pour tout $t \in \mathbb{R}$ à la condition :

$$\varphi'(t) = a\varphi(t)$$

1. Montrer que la fonction $\varphi_a : t \mapsto e^{at}$ appartient à A .
2. Soit φ un élément quelconque de A . Quelle est l'application dérivée de la fonction $h = \frac{\varphi}{\varphi_a}$?
En déduire que φ est de la forme $k\varphi_a$ où k est un nombre réel.

Partie B

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension trois. Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base fixée de E . Soit u l'application linéaire de E dans E telle que :

$$u(\vec{i}) = -\sqrt{2}\vec{i} + \vec{k}, \quad u(\vec{j}) = \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}, \quad u(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}$$

1. Soit \vec{V} un vecteur quelconque de E . Soit $x_1 ; x_2 ; x_3$ les coordonnées de \vec{V} dans la base B . Quelles sont les coordonnées dans B du vecteur $u(\vec{V})$?
2. Montrer que le noyau de u , noté $\ker(u)$, est le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur

$$\vec{V}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$$

3. Montrer que l'ensemble des vecteurs \vec{V} de E tels que $u(\vec{V}) = 2\vec{V}$ est le sous-espace vectoriel de E de dimension 1, engendré par le vecteur

$$\vec{V}_2 = (2 - \sqrt{2})\vec{i} + (2 + \sqrt{2})\vec{j} + 2\vec{k}$$

4. Montrer que l'ensemble des vecteurs \vec{V} de E tels que $u(\vec{V}) = -2\vec{V}$ est le sous-espace vectoriel de E de dimension 1, engendré par le vecteur

$$\vec{V}_3 = (-2 - \sqrt{2})\vec{i} + (-2 + \sqrt{2})\vec{j} + 2\vec{k}$$

5. On note $\text{Im}(u)$ l'image de E par u . Montrer que $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ est une base de E . Montrer que (\vec{V}_2, \vec{V}_3) est une base de $\text{Im}(u)$. En déduire que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Dans C et D, en plus des hypothèses de B, on suppose que E est un espace vectoriel euclidien, et que $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en est une base orthonormée.

Partie C

1. Montrer que les vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ sont deux à deux orthogonaux.
2. En utilisant la base $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$, donner une interprétation géométrique de l'application linéaire u .

Partie D

On appelle \mathcal{F} l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans E . Si \vec{F} est un élément de \mathcal{F} , pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\vec{F}(t)$ est donc un vecteur de E . On note $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ les coordonnées de $\vec{F}(t)$ dans la base B , et $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ les coordonnées de $\vec{F}'(t)$ dans la base $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$.

On rappelle que dire que la fonction vectorielle $\vec{F}(t)$ est dérivable en un point $t_0 \in \mathbb{R}$ revient à dire que chaque fonction numérique f_1, f_2, f_3 est dérivable en t_0 , ou encore que chaque fonction numérique $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ est dérivable en t_0 . Et on a alors :

$$F'(t_0) = f_1'(t_0) \vec{i} + f_2'(t_0) \vec{j} + f_3'(t_0) \vec{k} = \varphi_1'(t_0) \vec{V}_1 + \varphi_2'(t_0) \vec{V}_2 + \varphi_3'(t_0) \vec{V}_3$$

1. Soit \mathcal{F}_u l'ensemble de toutes les fonctions vectorielles $\vec{F} \in \mathcal{F}$ dérivables sur \mathbb{R} tout entier et vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$ la relation (\star) :

$$\vec{F}'(t) = u \left[\vec{F}(t) \right] \quad (\star)$$

- a. Soit $\vec{F} \in \mathcal{F}_u$. Comment se traduit la relation (\star) sur les coordonnées $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ de $\vec{F}(t)$ dans la base $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$?
- b. En déduire, en utilisant A, la forme des fonctions numériques $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.
2. Rechercher toutes les fonctions numériques f_1, f_2, f_3 définies et dérivables sur \mathbb{R} et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} f_1'(t) &= -\sqrt{2}f_1(t) + f_3(t) \\ f_2'(t) &= \sqrt{2}f_2(t) + f_3(t) \\ f_3'(t) &= f_1(t) + f_3(t) \end{cases}$$

$$\text{et } f_1(0) = 5, f_2(0) = 3, f_3(0) = \sqrt{2}$$