

## ∞ Baccalauréat C Bordeaux juin 1979 ∞

### EXERCICE 1

4 POINTS

Trouver les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels ( $0 < a < b$ ) dont le plus grand commun diviseur  $d$  et le plus petit commun multiple  $m$  vérifiant

$$2m + 3d = 78$$

et tels que  $a$  ne divise pas  $b$ .

### EXERCICE 2

5 POINTS

L'espace affine euclidien orienté  $E$  de dimension trois est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On désigne par  $\Delta$  la droite de  $E$ , dirigée par  $\vec{i}$ , passant par le point  $A$  de coordonnées  $(0; 0; 1)$  et par  $R$  la rotation d'axe  $\Delta$  qui transforme le point  $O$  en le point  $O'$  de coordonnées  $(0; -1; 1)$ .

Trouver les coordonnées  $(x_1; y_1; z_1)$  du point  $M_1$  transformé d'un point  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$  par la rotation  $R$ .

On désigne par  $T$  la translation de vecteur  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  et par  $V$  la transformation composée  $V = T \circ R$ .

Trouver les coordonnées  $(x_2; y_2; z_2)$  du point  $M_2$  transformé d'un point  $M$  de coordonnées  $(x; y; z)$  où  $M_2 = V(M)$ .

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application  $V$ .

### PROBLÈME

12 POINTS

#### Partie A

On désigne par  $a, h, t, x$  des nombres réels.

1. Déterminer trois constantes réelles  $A, B$  et  $C$  telles que, quel que soit  $t > 0$  :

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{1+t}.$$

2. Déterminer trois constantes réelles  $A', B'$  et  $C'$  telles que, quel que soit  $t > 0$  :

$$\frac{-1}{t^2(1+t)} = \frac{A'}{t^2} + \frac{B'}{t} + \frac{C'}{1+t}.$$

3. Pour  $0 < a < b$ , justifier l'existence des intégrales :

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{1}{t(1+t)^2} dt \quad J(a, b) = - \int_a^b \frac{1}{t^2(1+t)} dt.$$

Montrer que  $I(a, b) \geq 0$  et  $J(a, b) \leq 0$ .

Calculer  $I(a, b)$  et  $J(a, b)$ .

4. Le nombre réel  $a > 0$  étant fixé, montrer que  $I(a, b)$  et  $J(a, b)$  tendent vers des limites réelles  $F(a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} I(a, b)$  et  $G(a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} J(a, b)$  quand  $b$  tend vers  $+\infty$  telles que :  $G(a) \leq 0 \leq F(a)$ .

### Partie B

Dans la suite du problème on pose, pour  $x > 0$  :

$$F(x) = \log \frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x}$$

$$C(x) = \log \frac{1+x}{x} - \frac{1}{x}$$

où  $\log$  désigne la fonction logarithme népérien.

- Soit  $\theta$  l'application de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}$  qui à  $x$  associe «  $(1+x) - x$ .  
Du signe de  $\theta'(x)$  et de la valeur de  $\theta(0)$  déduire que  $\theta(x) < 0$  pour  $x > 0$ . ( $\theta'$  désigne la dérivée de  $\theta$ ).  
Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}$  qui à  $x$  associe  $\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ .  
Du signe de  $\varphi'(x)$  et de la valeur de  $\varphi(0)$  déduire que  $\varphi(x) > 0$  pour  $x > 0$ . ( $\varphi'$  désigne la dérivée de  $\varphi$ ).  
Prouver alors que, pour tout  $x > 0$  :  $-\frac{1}{2x^2} < G(x) < 0$ .
- Soit  $\psi$  l'application de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}$  qui à  $x$  associe  $\log(1+x) - \frac{x}{1+x}$ .  
Étudier le signe de  $\psi$  pour  $x > 0$  et en déduire que  $F(x) > 0$  pour  $x > 0$ .
- Montrer que, quel que soit  $x > 0$ ,

$$F(x) - G(x) < \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad 0 < F(x) < \frac{1}{x^2}.$$

- Des inégalités  $G(x) < 0 < F(x)$ , déduire que, pour tout  $x > 0$

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$

### Partie C

- Soit  $\alpha$  un nombre réel supérieur ou égal à 1. Montrer que
  - $0 \leq \int_1^\alpha F(x) dx \leq 1$ .
  - $\frac{1}{2} \leq \int_1^\alpha G(x) dx \leq 0$ .
- Calculer  $K(\alpha) = \int_1^\alpha F(x) dx$ .  
(On pourra intégrer par parties). En déduire  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} K(\alpha)$ .
- Calculer  $L(\alpha) = \int_1^\alpha G(x) dx$  et déterminer  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} L(\alpha)$ .