

∞ Baccalauréat C Bordeaux juin 1981 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit P un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit D la droite de P d'équation : $2x - 3y + 1 = 0$.

1. Déterminer l'ensemble E des points de D dont les coordonnées sont des entiers relatifs.
2. Déterminer le sous-ensemble F des points de E dont le carré de la distance au point O est multiple de 5.
Préciser les points de F dont les coordonnées sont strictement comprises entre -20 et $+20$.

EXERCICE 2

3 POINTS

Soit \mathbb{C} le corps des nombres complexes et i un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1. Calculer $\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^4$.
2. Déterminer les nombres réels a, b tels que

$$(a + ib)^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i.$$

PROBLÈME

14 POINTS

Partie A

Soit a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel $n \geq 1$; on appelle f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle réel $\left[-\frac{1}{a}; \frac{1}{a}\right]$ par

$$f_n(x) = (1 - a^2 x^2)^{\frac{n}{2}}.$$

Soit Γ_n la courbe représentative de f_n dans un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les coniques C_1 et C_2 contenant respectivement Γ_1 et Γ_2 .
Préciser la nature de ces coniques. Indiquer leurs foyers et les directrices associées (discuter selon les valeurs de a).
2. Étudier les variations de f_3 .
Tracer $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ dans un même repère en prenant $a = 2$. (On ordonnera les réels $f_1(x), f_2(x)$ et $f_3(x)$ pour le tracé de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.)

Partie B

1. Soit a un nombre réel appartenant à $[0 ; \pi]$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de Γ_1 avec la droite d'équation

$$(\cos \alpha)y - a(\sin \alpha)x = 0 \quad \text{pour } a \neq 0 \text{ et } a \neq \pi.$$

2. a. On désigne par D_α l'ensemble des points M de P dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient

$$\begin{cases} -\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a} & \text{et} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - a^2 x^2} \end{cases}$$

On désigne par P_α le demi-plan formé des points M dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient

$$(\cos \alpha)y - a(\sin \alpha)x \leq 0.$$

(étudier la position du point $(1 ; 0)$ par rapport au demi-plan P_α).

Soit $D_\alpha = D_\pi \cap P_\alpha$.

L'aire de D_α est notée $\mathcal{A}(\alpha)$.

Démontrer que pour tout $\alpha \in [0 ; \pi]$ on a

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2a} - \int_0^{\frac{\cos \alpha}{a}} \sqrt{1 - a^2 x^2} dx.$$

(On distinguera pour cela trois cas : $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, $\alpha \in]\frac{\pi}{2} ; \pi]$).

- b. Démontrer que la fonction $\mathcal{A} : \alpha \mapsto \mathcal{A}(\alpha)$ est dérivable sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, et définir la fonction dérivée \mathcal{A}' de \mathcal{A} sur cet intervalle.

En déduire que pour tout $\alpha \in [0 ; \pi]$ on a $\mathcal{A}'(\alpha) = \frac{\alpha}{2a}$.

Partie C

Soit T_a l'application affine de P dans P qui à tout point m de coordonnées $(x ; y)$ associe le point M de coordonnées $(X ; Y)$ telles que

$$X = ax, \quad Y = y.$$

Quelles sont les images de Γ_1 et D_α par T_a ? Calculer l'aire de l'image de D_α par T_a .

Partie D

On suppose dans la suite que $\alpha \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$. Soit un point mobile dans le plan P dont les coordonnées à la date t ($t \in \mathbb{R}$) sont

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\alpha \cos^2 t) \\ y(t) = \sin(\alpha \cos^2 t). \end{cases}$$

Étudier les fonctions : $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

En déduire la trajectoire de M et décrire le mouvement de M (on ne cherchera pas à vérifier si le mouvement est accéléré ou retardé).