

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Bordeaux ∞

EXERCICE 1

Dans un plan affine euclidien P on considère un triangle équilatéral (A, B, C) inscrit dans un cercle (Γ) .

Soit M un point, distinct de A et de C , situé sur celui des arcs AC dont B n'est pas élément. I est le point du segment $[MB]$ tel que $MI = MA$.

1. Montrer que le triangle (I, M, A) est équilatéral.
2. On oriente le plan P de façon qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit $+\frac{\pi}{3}$. Soit r la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $+\frac{\pi}{3}$.

Déterminer les images par r des points B et I .

En déduire

$$MA + MC = MB.$$

EXERCICE 2

\mathbb{C} désigne le corps des nombres complexes et i un élément de \mathbb{C} tel que $i^2 = -1$.

Soit f l'application de \mathbb{C} dans lui-même définie par

$$f(z) = z^4 + 2\sqrt{3}(1 + 2i)z^3 - 4(1 - 6i)z^2 - 8\sqrt{3}(4 - 6i)z - 192.$$

Démontrer qu'il existe deux éléments a et b de \mathbb{C} tels que pour tout élément z de \mathbb{C} :

$$f(z) = (z^2 + 2\sqrt{3}z + 2i)(z^2 + az + b).$$

Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

Préciser le module et l'argument de chaque solution.

Calculer le produit de ces quatre racines.

PROBLÈME

On désigne par \mathcal{E} l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ω étant un nombre réel non nul, on considère les fonctions f_ω et g_ω , de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définies respectivement par

$$f_\omega(x) = e^{-\omega x} \sin \omega x \quad \text{et} \quad g_\omega(x) = e^{-\omega x} \cos \omega x$$

et \mathcal{F}_ω désignera le sous-espace vectoriel de \mathcal{E} engendré par f_ω et g_ω .

Partie A

1. **a.** Démontrer que le couple (f_ω, g_ω) détermine une base de \mathcal{F}_ω .
b. Montrer que tout élément de \mathcal{F}_ω admet une dérivée élément de \mathcal{F}_ω .

2. On considère l'application φ_ω de \mathcal{F}_ω vers \mathcal{F}_ω , qui à tout élément f de \mathcal{F}_ω fait correspondre la fonction dérivée f' de f .
- a. Démontrer que φ_ω est un endomorphisme de \mathcal{F}_ω ; déterminer sa matrice M_ω , relativement à la base (f_ω, g_ω) ; montrer que φ_ω est bijectif.
- b. À la matrice M_ω est associé le nombre complexe $z_\omega = -\omega + \omega i$. (i étant un nombre complexe tel que $i^2 = -1$).
- Déterminer les entiers naturels n supérieurs ou égaux à 1 pour lesquels z_ω^n est un nombre réel; quelle est alors la nature de l'endomorphisme $\varphi_\omega^n = \varphi_\omega \circ \varphi_\omega \circ \dots \circ \varphi_\omega$, composé de n termes égaux à φ_ω .

Partie B

1. On pose $\omega = 2$ et on considère la fonction

$$\begin{aligned} f_2: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{-2x} \sin 2x \end{aligned}$$

- a. Étudier les variations de f_2 pour x appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$.
- b. Soit \mathcal{C} et Γ les courbes d'équations respectives $y = e^{-2x} \sin 2x$ et $y = e^{-2x}$ relativement à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Calculer les abscisses des points communs à \mathcal{C} et Γ et démontrer qu'en chacun de ces points les courbes \mathcal{C} et Γ ont même tangente.
- c. Construire l'arc de la courbe \mathcal{C} correspondant à l'intervalle $[0; \pi]$ dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = 3$ et $\|\vec{j}\| = 10$, en centimètres). Construire également Γ .
2. a. Déterminer pour $\omega = 2$ l'endomorphisme réciproque φ_ω^{-1} de l'endomorphisme φ_ω , de la question A 2. En déduire les primitives, sur \mathbb{R} , des fonctions f_2 et g_2 .
- b. Soit F la fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} définie par

$$F(X) = \int_0^X f_2(x) dx.$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(X)$.

3. a. Calculer $\int_0^\pi e^{-2x} \sin 2x dx$ et $\int_0^\pi e^{-2x} \cos 2x dx$.

En déduire $\int_0^\pi e^{-2x} \sin^2 x dx$ et $\int_0^\pi e^{-2x} \cos^2 x dx$.

- b. a et b étant deux nombres réels calculer

$$I(a, b) = \int_0^\pi (ae^{-x} \sin x + be^{-x} \cos x)^2 dx$$

en fonction de a et b .

- c. Démontrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, I(a, b) = 0 \Rightarrow a = b = 0$ et en déduire que l'application Φ de $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1$ vers \mathbb{R} définie par

$$\Phi(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x) dx$$

est un produit scalaire.