Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C juin 1985 Bordeaux[1] ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{u},~\overrightarrow{v}\right)$, on considère les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z, z^2, z^3 où z désigne un nombre complexe.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points M_1, M_2, M_3 soient deux à deux distincts.
2. On suppose les points M_1, M_2, M_3 deux à deux distincts. Déterminer l'ensemble des points M_1 tels que l'un des angles du triangle $M_1M_2M_3$ soit un angle droit.

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC.
A′, B′, C′ désignent les milieux respectifs des bipoints (B, C), (C, A), (A, B).

1. Montrer qu'il existe un point P et un seul vérifiant les propriétés suivantes PA = PC et un mesure de l'angle en radians de $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{PA}},~\overrightarrow{\text{PC}}}\right)$ est égale à $+\dfrac{\pi}{2}$.

   Soit Q le point tel que : QA = QB et un mesure de l'angle en radians de $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{QB}},~\overrightarrow{\text{PA}}}\right)$ est égale à $+\dfrac{\pi}{2}$.
2. **a.** On désigne par :
   - r_{P} la rotation de centre P et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$;
   - r_{Q} la rotation de centre Q et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$;
   - $s_{\text{A}'}$ la symétrie par rapport au point A′.

   Étudier l'image de A par l'application $f = r_{\text{Q}} \circ s_{\text{A}'} \circ r_{\text{P}}$.
3. Quelle est la nature du triangle A′PQ ?

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

PROBLÈME **11 points**

Partie A

Étude d'une fonction numérique définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer

1. Démontrer que pour tout nombre réel x élément de l'ensemble $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;\,+\infty[$ l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est définie (ln désigne la fonction logarithme népérien).
   On considère l'application :
   $$f:\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;\,+\infty[\to\mathbb{R}\quad x\longmapsto f(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$
2. Démontrer que f est dérivable en tout point de l'ensemble de définition, et que pour tout x élément de $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;\,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{(\ln 2x)(\ln x)}$.
   Déterminer le sens de variation de f.
3. **a.** Démontrer que pour tout x élément de $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;\,+\infty[$:
   $$\frac{x}{\ln 2x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{\ln x}.$$
   b. Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers zéro.
   c. Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. On considère l'application $\Psi:]0\,;\,1]\to\mathbb{R},\quad t\longmapsto\Psi(t)=2-2t+\ln t$.
   De l'étude des variations de Ψ sur $]0;\,1]$ (sens de variation de Ψ et limites de Ψ aux bornes de l'intervalle de définition) déduire l'existence d'un unique nombre réel α élément de $\left]0\,:\,\frac{1}{2}\right[$, [tel que $\Psi(\alpha)=0$ et justifier que pour tout nombre réel t élément de $[\alpha,1]$, on a : $\ln t\geqslant 2t-2$.
   Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que pour tout x élément de $\left[\alpha\,;\,\frac{1}{2}\right[$
   $$f(x)\leqslant\frac{1}{2}\int_x^{2x}\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t.$$
   En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.
5. Démontrer que pour tout nombre réel t élément de $[1\,;\,+\infty[$:
   $$\ln t\leqslant t-1.$$
   Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

6. **a.** Résumer dans un tableau l'étude des variations de f.

   b. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ et $(\mathscr{C}') = (\mathscr{C}) \cup \{\text{O}\}$.

   Donner l'allure de la courbe $(\mathscr{C}')$ en précisant la tangente en 0 et les droites asymptotes.

Partie B

Étude d'une famille de fonctions numériques définies par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer

On considère, pour chaque entier n supérieur ou égal à 2, l'application :

$$\begin{array}{rrcl} g_n : &]1~;~+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g_n(x) = \displaystyle\int_x^{nx} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

et on désigne par (Γ_n) la courbe représentative de g_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. n et m étant des entiers tels que : $2 \leqslant n < m$, étudier la position relative des courbes (Γ_n) et (Γ_m).
2. Démontrer que g_n est dérivable en tout point de l'intervalle $]1~;~+\infty[$ et expliciter sa fonction dérivée.

   En déduire que (Γ_n) admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point d'abscisse $u_n = \dfrac{1}{n^{n-1}}$ et d'ordonnée $v_n = g_n\left(u_n\right)$.
3. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente et préciser sa limite.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a :

   $$\frac{(n+1)^n}{n^n} < \mathrm{e} \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < 1.$$

   (on pourra utiliser le résultat : pour tout réel t élément de $]1~;~+\infty[$,
   $\ln t < t-1$).

   En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.
4. Étudier la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$.