

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Bordeaux septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $xOy$ , de vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . Un point  $M$  se déplace dans le plan et le vecteur accélération,  $\Gamma$ , de son mouvement est constamment égal au vecteur

$$\vec{i} + \vec{j} = b\sqrt{2}.$$

Au temps  $t = 0$ , le mobile est au point  $O$  et le vecteur vitesse est alors  $\vec{V}_0 = \vec{i}$ .

Former l'équation vectorielle du mouvement. Déterminer la trajectoire par son équation dans le repère  $xOy$ , puis la préciser en choisissant un repère orthonormé dans lequel un des vecteurs unitaires est  $\vec{b}$ .

Déterminer la loi horaire du point  $M$ ; en particulier, déterminer la position de  $M$  correspondant à la vitesse minimale.

(Faire un graphique en prenant 4 cm pour module des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .)

EXERCICE 2

On donne l'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \sqrt[3]{64 + x}.$$

Utiliser le théorème des accroissements finis sur le segment  $[0; 1]$  pour donner un encadrement de  $\sqrt[3]{65}$ .

PROBLÈME

Partie A

On donne dans le plan deux droites  $x'x$  et  $y'y$  concourantes en  $O$ , de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

Une transformation ponctuelle,  $\mathcal{T}$ , est définie dans le plan rapporté au repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  de la manière suivante :

le point  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  a pour transformé le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$  vérifiant les relations

$$\begin{cases} x' &= kx \\ y' &= k'y, \end{cases}$$

$k$  et  $k'$  étant deux nombres réels donnés non nuls.

On désignera par  $P$  et  $P'$  les projections de  $M$  et de  $M'$  sur  $x'x$  parallèlement à  $y'y$  et par  $Q$  et  $Q'$  les projections de  $M$  et  $M'$  sur  $y'y$  parallèlement à  $x'x$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est le produit, commutatif, de deux affinités, dont on précisera les éléments. Montrer que  $\mathcal{F}$  est une bijection du plan dans lui-même et définir la transformation réciproque,  $\mathcal{F}^{-1}$ .

Quels sont les points doubles de  $\mathcal{F}$ ? Discuter suivant les valeurs de  $k$  et  $k'$ .

Déterminer l'équation de la transformée  $(D')$  par  $\mathcal{F}$  de la droite  $(D)$  d'équation  $ax + by + c = 0$ .

En déduire les droites globalement invariantes par  $\mathcal{F}$  [c'est-à-dire telles que  $(D)$  et  $(D')$  soient confondues].

Examiner avec soin tous les cas possibles.

2. On suppose dans cette question  $k \neq 1$ ,  $k' \neq 1$  et  $k \neq k'$ .

- a. Si  $M$  et  $M'$  sont distincts, la droite  $MM'$  coupe  $x'x$  en  $N$  et  $y'y$  en  $N'$ .

Montrer que le birapport  $(N, N', M, M')$  ne dépend que des nombres  $k$  et  $k'$ .

- b. Soit  $(\Delta)$  une droite passant par  $O$  distincte de  $x'x$  et  $y'y$  et  $(\Delta')$  sa transformée par  $\mathcal{F}$ .

Montrer que les droites  $x'x$ ,  $y'y$ ,  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  forment un faisceau dont le birapport ne dépend pas du choix de  $(\Delta)$ .

Peut-on choisir  $k'$  et  $k$  pour que ce faisceau soit harmonique?

Dans toute la suite du problème, les droites  $x'x$  et  $y'y$  sont perpendiculaires et le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé.

### Partie B

$\alpha, \beta$  et  $R$  étant des réels donnés, on considère le cercle  $(C)$  d'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$

Montrer que le transformé  $(C')$  du cercle  $(C)$  par  $\mathcal{F}$  est une ellipse ou un cercle ayant pour centre le transformé du centre de  $(C)$ .

On précisera, lorsque  $(C')$  est une ellipse, la direction du grand axe et celle du petit axe.

### Partie C

On suppose maintenant  $k > 0$ ,  $k \neq 1$  et  $k' = -k$ .

1. a. Montrer que  $\mathcal{F}$  peut être considérée comme le produit commutatif d'une homothétie positive et d'une symétrie par rapport à une droite.

- b. Soit  $(\Delta)$  une droite donnée du plan; on désigne par  $\mathcal{S}$  la symétrie par rapport à  $(\Delta)$ .

On considère la composée  $\mathcal{F} \circ \mathcal{S}$  des transformations  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{S}$ .

Préciser la nature de la transformation  $\mathcal{F} \circ \mathcal{S}$  en étudiant successivement le cas où  $(\Delta)$  est parallèle à  $x'x$  et le cas où  $(\Delta)$  coupe  $x'x$  en  $I$ ; on posera

$$\theta = [x'x, (\Delta)] \pmod{\pi}.$$

Montrer que, si  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , le point double,  $\omega$ , de la transformation  $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$  reste sur un arc de cercle, que l'on précisera, lorsque  $k$  varie. Que dire de  $\omega$  lorsque  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ?

2. a. Tracer la courbe  $(H)$  d'équation

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1},$$

puis sa transformée  $(H')$  par  $\mathcal{T}$  dans le cas

$$k = 2 \quad \text{et} \quad k' = -2.$$

Préciser les asymptotes de ces deux courbes.

- b.  $X$  étant un réel vérifiant  $0 < X < 1$ , calculer l'aire  $(\Sigma)$  de la surface limitée par  $x'x$ , le point O, la courbe  $(H)$  et la droite d'équation  $x = X$ .  
Calculer l'aire  $(\Sigma')$  de la surface limitée par  $x'x$ , le point O, la courbe  $(H')$  et la droite d'équation

$$x = 2X.$$

On vérifiera que  $(\Sigma') = 4(\Sigma)$ .

**N. B.** - On rappelle que l'aire d'une surface est un nombre positif ou nul.