Durée : 4 heures

Baccalauréat C Bordeaux septembre 1975

EXERCICE 1

1. Calculer x^4 pour x appartenant à l'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En déduire $x^5 - x$.

2. Trouver tous les couples $(x\ ;\ y)$ avec x et y éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ tels que

$$x^5 + y^5 = \dot{3}.$$

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ on donne la rotation r_1 de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$; puis la rotation r_2 de centre A de coordonnées $\left(1\ ;\ \sqrt{3}\right)$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

1. Étudier l'application $r_2 \circ r_1$.

2. Déterminer les points invariants éventuels.
Toute forme de solution est acceptée :
- soit géométrique (marquer dans ce cas sur une figure tous les points que l'on voudra utiliser) ;
- soit en utilisant les coordonnées, les affixes, etc.)

PROBLÈME

Partie A

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{P}_2$ des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré au plus égal à 2 auquel on ajoute la fonction identiquement nulle, est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, avec pour base naturelle $\left\{p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\right\}$, p_n désignant la fonction $x \longmapsto x^n$ pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
Pour $p \in \mathcal{P}_2$ on considère l'application $f :\ p \longmapsto f(p)$ définie par :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(p)(x) = x^2 p''(x) - (\mu x + \mu - 1)p'(x) + p(x)$$

μ réel donné et p' et p'' désignant les fonctions polynômes dérivées première et seconde de p.

1. Montrer que f est endomorphisme de $\mathcal{P}_2$.
Calculer $f\left(p_0\right)$, $f\left(p_1\right)$, $f\left(p_2\right)$ et en déduire $f(p)$ où p est défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = ax^2 + bx + c.$$

2. Montrer que si $\mu \neq \dfrac{3}{2}$ et $\mu \neq 1$, $f\left(p_0\right)$, $f\left(p_1\right)$, $f\left(p_2\right)$ sont trois fonctions polynômes indépendantes dans $\mathcal{P}_2$.
En déduire alors que f est bijective.
Cas particulier : si $\mu = 2$ trouver les fonctions polynômes p de $\mathcal{P}_2$, solutions de l'équation :

$$f(p) = q \quad \text{où } q \text{ est définie par } \forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x) = x^2 - 1.$$

3. Dans cette équation on suppose que $\mu = 1$. Trouver le noyau et l'image de f et montrer que c'est une projection vectorielle.
Comment faut-il choisir q dans $\mathcal{P}_2$ pour qu'il existe des fonctions polynômes p dans $\mathcal{P}_2$ vérifiant l'équation :

$$(2) \qquad f(p) = q\,?$$

Application : on considère q défini par $q(x) = x^2 - 1$, trouver les fonctions polynômes p solutions de (2).

4. Étudier f (noyau et image) dans le cas où ţ $= \dfrac{3}{2}$.

Partie B

On se propose d'étudier l'ensemble E des fonctions φ de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables vérifiant :

$$(3) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad x^2\varphi''(x) - x\varphi'(x) + \varphi(x) = 0.$$

1. En comparant (1) et (3) et grâce au A - 3, montrer que E n'est pas vide.

2. On cherche une fonction φ de E sous la forme

$$\varphi(x) = xu(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^\star,$$

où u est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Vérifier que (3) équivaut à : $xu'(x) = A$ (constante arbitraire) pour tout x dans $\mathbb{R}_+^\star$.
En déduire la forme générale des fonctions u, puis celle des fonctions de E.

3. On considère la fonction $h : x \longmapsto x\operatorname{Log} x$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ (Log désigne la fonction logarithme népérien).

a. Montrer qu'elle appartient à E.

b. On désigne par $\tilde{h}$ le prolongement de h défini de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{h}(x) & = & h(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^\star \\ \tilde{h}(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

La fonction $\tilde{h}$ est-elle continue au point $x = 0$? , dérivable ?

c. Étudier la variation et représenter le graphe de $\tilde{h}$.

N. B. : $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels ; $\mathbb{R}_+^\star$ l'ensemble des réels positifs privé de 0.