

♣ Baccalauréat C Bordeaux septembre 1976 ♣

EXERCICE 1

Soient $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{2x_n + 3}{x_n + 2}$.

1. Démontrer que ces relations permettent de définir une suite de réels, (x_0, x_1, x_2, \dots) dont chaque terme est positif.
Montrer que pour tout entier naturel n , $x_n^2 < 3$.
2. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On admettra qu'elle est convergente.
3. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier naturel A , s'écrivant $\overline{356y2x}$ dans le système décimal, soit divisible par 5 et par 7.

PROBLÈME

On désigne par \mathcal{V} un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et par E un espace affine euclidien associé à \mathcal{V} et rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

$\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est donc une base orthonormée de \mathcal{V} .

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x - 2 + \sqrt{2x^2 - 4x - 6}$$

1. Montrer que la courbe (C) représentative de f dans le repère \mathcal{R} admet deux asymptotes dont on établira les équations. On vérifiera que le point O' tel que $\overrightarrow{OO'} = \vec{i} - \vec{j}$ est commun aux deux asymptotes.
Préciser la position de (C) par rapport à ces deux droites.
2. Étudier les variations de la fonction f et préciser les tangentes à (C) aux points d'abscisses $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.
3. Représenter la courbe (C) en utilisant le repère \mathcal{R} et montrer qu'elle coupe l'axe (O, \vec{i}) en un seul point dont on calculera l'abscisse négative.
4. (C') désignant la courbe représentant dans le repère (O', \vec{i}, \vec{j}) la fonction G définie par

$$G(X) = X - \sqrt{2X^2 - 8},$$

montrer que (C) et (C') sont symétriques par rapport à O' .

En déduire l'ensemble H des points du plan E dont les coordonnées par rapport au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient l'équation $X^2 - Y^2 + 2XY - 8 = 0$.

Partie B

On donne dans le plan E l'application affine S définie analytiquement dans le repère par $M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$ tel que

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - (1 + \sqrt{2}) \end{cases}$$

1. s désignant l'homomorphisme de \mathcal{V} dans lui-même associé à S , écrire sa matrice M relativement à la base \mathcal{B} ; en déduire que s est un automorphisme involutif de \mathcal{V} .
2. Montrer que :
 - a. l'ensemble des vecteurs \vec{u} de \mathcal{V} invariants par s est une droite vectorielle D_1 sur laquelle on fixera la base $\vec{I} = \vec{i} + \beta \vec{j}$; calculer β .
 - b. l'ensemble des vecteurs \vec{u} de \mathcal{V} transformés en leurs opposés par s est une droite vectorielle D_2 sur laquelle on fixera la base $\vec{J} = \alpha \vec{i} + \vec{j}$; calculer α .
 - c. les deux droites vectorielles D_1 et D_2 sont orthogonales. Quelle est la nature de s ? Écrire sa matrice M' relativement à la base (\vec{I}, \vec{J}) .
3. Montrer que O' (voir A, 1^{re} question) appartient à l'ensemble D , que l'on précisera, des points de E invariants par S . Tracer D sur la figure réalisée à la partie A du problème.
Montrer que S est une involution affine dont on précisera la nature.

Partie C

1. Écrire les équations S dans le repère (O', \vec{i}, \vec{j}) ; on désignera par $(X; Y)$ les coordonnées d'un point M dans le repère et par $(X'; Y')$ les coordonnées de $M' = S(M)$.
2. Vérifier que la courbe H est globalement invariante par S .
3. Écrire l'équation de H dans le repère (O', \vec{i}, \vec{j}) . Reconnaître H ; préciser ses foyers dans ce repère.