

Baccalauréat C Bordeaux septembre 1977

EXERCICE 1

4 POINTS

On considère le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\}$.

1. Dresser les tables d'addition et de multiplication.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2} + x = \dot{1}$, en l'inconnue x .
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{3}x = \dot{2}$, en l'inconnue x .
4. Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ le système $\begin{cases} \dot{2}x + \dot{3}y = \dot{2} \\ \dot{1}x + \dot{2}y = \dot{4} \end{cases}$ en les inconnues x et y .
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation, en l'inconnue x , $x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Un sac contient cinq jetons numérotés 1, 1, 2, 2, 3.

On extrait simultanément deux jetons et on désigne par X la somme des nombres inscrits sur les deux jetons. Tous les tirages sont équiprobables.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
3. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X .

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est considéré comme un espace vectoriel euclidien sur \mathbb{R} . Soit $\mathcal{B} = (1, i)$ la base constituée des nombres complexes 1 et i . On dira que le nombre complexe $z = x + iy$ est le vecteur de coordonnées $(x; y)$ dans la base \mathcal{B} .

Si $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont deux vecteurs de cet espace vectoriel, leur produit scalaire sera $xx' + yy'$. Soit a un réel donné et f_a l'application linéaire de \mathbb{C} vers \mathbb{C} de matrice $m = \begin{pmatrix} 2a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

On pose $f(z) = Z = X + iY$ avec $z = z + iy$ (x, y, X, Y réels).

1.
 - a. Quelles sont les coordonnées de Z dans la base \mathcal{B} ?
 - b. Exprimer Z en fonction de x et y puis en fonction de z et \bar{z} où $\bar{z} = x - iy$ désigne le nombre complexe conjugué de $z = x + iy$.
 - c. Quels sont les éléments de \mathbb{C} invariants par f_a ? Vérifier que l'ensemble de ces éléments est dans tous les cas un sous-espace de \mathbb{C} .
 - d. Pour quelle valeur du réel a , f_a est-il une rotation vectorielle?

2. a. Montrer que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, f_a est une bijection de \mathbb{C} sur \mathbb{C} .
Soit f_a^{-1} l'application réciproque de f_a . On pose $f_a^{-1}(z) = X' + iY'$ (X', Y' réels).
- b. Déterminer dans la base \mathcal{B} , la matrice de f_a^{-1} .
- c. Soit $z = x + iy$ un élément de \mathbb{C} . Exprimer $Z' = f_a^{-1}(z)$ en fonction de x et y puis en fonction de z et \bar{z} . Déterminer une relation entre Z, Z' et z . En déduire que $f_a + f_a^{-1} = 2a\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ où $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ est l'application identique dans \mathbb{C} .
- d. Si $a \neq 0$, déterminer le noyau et l'image de $f_a - f_0$.

Partie B

Soit P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel \mathbb{C} et rapporté à un repère orthonormé d'origine O et de base \mathcal{B} . On désigne par φ_a l'application affine de P dans P qui au point O associe le point $A(1; a)$, $a \in \mathbb{R}$ et dont l'application linéaire associée est f_a . L'image par φ_a d'un point M est alors le point $M' = \varphi_a(M)$.

1. a. Déterminer les coordonnées x' et y' du point M' en fonction des coordonnées x et y du point M .
- b. Démontrer que si $a \neq 1$ alors l'application affine φ_a admet un point invariant unique Ω dont on déterminera les coordonnées.
Si $a = 1$, quel est l'ensemble des points invariants?
- c. Établir que φ_a est la composée d'une application affine de point invariant O et d'une translation.
- d. Quelle est l'image par φ_a de la droite affine d'équation $x = 0$? de la droite affine d'équation $y = 2ax$?
2. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que φ_0 est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle. Quelle est l'image par φ_0 du cercle de centre O et de rayon 1?
Quelles sont les images par φ_0 des bissectrices des axes du repère.
3. On suppose $a = 1$.
- a. Exprimer $y' - x'$ en fonction de $y - x$. En déduire qu'il existe une famille de droites de même direction globalement invariantes par φ_1 .
- b. On considère la fonction numérique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

Étudier la fonction f . Construire sa courbe représentative (C) dans le repère (O, \mathcal{B}) . Déterminer une équation de la courbe (C') transformée de (C) par φ_1 . Vérifier que cette équation peut s'écrire sous la forme $x = y - \frac{1}{y}$.

Construire (C') sur la même figure que (C) , (On pourra au préalable étudier et représenter la fonction $g: x \longmapsto y = x - \frac{1}{x}$. On déduira la courbe (C') de la courbe représentative de la fonction g).

4. a. On suppose $a \neq 0$. Soit T_1 l'application affine de P dans P qui au point O associe le point $A(1; a)$ et dont l'application linéaire associée est

$$u = f_a + f_a^{-1}.$$

Démontrer que T_1 est une homothétie ou une translation.

- b.** On suppose encore $a \neq 0$. Soit T_2 l'application affine de \mathbb{P} dans \mathbb{P} , qui au point O associe le point $A(1; a)$ et qui admet $v = f_a - f_0$ pour application linéaire associée. Démontrer que T_2 est la composée d'une homothétie, d'une projection sur une droite et d'une translation.