Baccalauréat C Bordeaux septembre 1979

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Étant donné un entier relatif n on considère les entiers relatifs :

$$A = 3n+4 \quad \text{et} \quad B = 9n-5.$$

1. Déterminer, suivant les valeurs de n, le plus grand commun diviseur de A et B.
2. Déterminer les valeurs de n pour que le plus grand commun diviseur de A et B soit égal à 17 et le plus petit commun multiple de A et B soit égal à 884.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

On considère un plan affine E rapporté à un repère affine $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$. Soient A le point de coordonnées (1 ; 2) et A′ le point de coordonnées (3, ; 4).
On désigne par f l'application affine de E dans E qui transforme A en A′ et dont l'endomorphisme associé φ vérifie les deux propriétés :

a. φ est involutif
b. $\varphi\left(\overrightarrow{\imath}\right) = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$.

1. f est-elle bijective ?
2. Déterminer $\varphi\left(\overrightarrow{\jmath}\right)$.
3. Trouver les coordonnées $\left(x_1\,;\,y_1\right)$ du point M_1 transformé d'un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ par l'application f.
4. f est-elle involutive ? f possède-t-elle des points invariants ?

PROBLÈME **12 POINTS**

On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions numériques, définies sur $\mathbb{R}$, de la variable réelle x. On rappelle que cet ensemble, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On notera par θ l'élément neutre pour l'addition (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta(x) = 0$).
On désigne par $\mathscr{J}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{F}$ qui sont intégrables sur tout intervalle fermé borné $[-a\,;\,a]$ $(a > 0)$.
On rappelle que, pour tout $f \in \mathscr{J}$, $a > 0$, il existe $M_{a,\,f} \geqslant 0$ tel que, pour tout
$x \in [-a\,;\,a]$, $|f(x)| \leqslant M_{a,\,f}$.

Partie A

1. Dire pourquoi les fonctions suivantes sont éléments de l'ensemble $\mathscr{J}$

$$f_1 : x \longmapsto \text{E}\,(x)$$

où E (x) est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ tel que $\text{E}(x) \leqslant x < \text{E}\,(x)+1$

$$f_2 : x \longmapsto \sin x$$

$$f_3 : x \longmapsto \cos x$$

$$f_4 : x \longmapsto \sqrt{|x|}$$

2. Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{J}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la relation :

$$\left\{\begin{array}{lcl} F(x) & = & \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et} \\ F(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

détermine un élément F de $\mathcal{F}$ et une application linéaire Φ de $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{F}$: $f \longmapsto \Phi(f) = F$. Déterminer l'image par Φ de :

a. la fonction nulle θ

b. la fonction constante $k : x \longmapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)

c. la fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$

d. la fonction f_2

e. la fonction f_3

3. a. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\int_{-x} x f_1(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

(On pourra utiliser des considérations graphiques en faisant intervenir le point ω de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1/2 ; 0)$.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{x} x + 1 f_1(t)\,\mathrm{d}t = x$$

c. Déterminer l'image par Φ de la fonction f_1.

Partie B

1. Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{J}$, la fonction $F = \Phi(f)$ est une fonction continue, impaire.

Prouver que l'application Φ applique $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{J}$.

2. Montrer que si $f \in \mathcal{J}$ est impaire alors $\Phi(f) = \theta$. (On pourra utiliser des considérations graphiques). En déduire quelle est l'application $\Phi \circ \phi$ de $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{J}$.

3. On suppose que $f \in \mathcal{F}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que, dans ces conditions, $\Phi(f) = F$ est une fonction dérivable. Exprimer $F'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.

4. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathcal{J}$ qui sont continues et élément du noyau de Φ.

Partie C

On considère l'élément g de $\mathscr{J}$ défini par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{Log}\,2} & \text{si} \quad |x| \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{\text{Log}\,|x|} & \text{si} \quad |x| > 2 \end{cases}$$

1. Construire la courbe représentative γ de la fonction g dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Montrer que $g \in \mathscr{J}$.

2. Soit $G = \Phi(g)$. On ne cherchera pas à calculer $G(x)$.

Démontrer que, pour tout $t > 2$, $\dfrac{1}{\text{Log}\,t} > \dfrac{1}{t}$.

En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$.

3. Soit $h(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\text{Log}\,t}\,\text{d}t$ pour $x \geqslant 2$.

Soient A, N, M les points de γ d'abscisses respectives 2, $\sqrt{x}$ et x ; A′, N′, M′ leurs projections orthogonales sur l'axe $x'\text{O}x$ pour $x \geqslant 4$.

En majorant $h(x)$ par la somme des aires de deux trapèzes montrer que

$$h(x) \leqslant \frac{\sqrt{x} - 2}{2}\left[\frac{1}{\text{Log}\,2} + \frac{1}{\text{Log}\,\sqrt{x}}\right] + \frac{x - \sqrt{x}}{2}\left[\frac{1}{\text{Log}\,x} + \frac{1}{\text{Log}\,\sqrt{x}}\right]$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$.

4. Construire la courbe représentative de la fonction G dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.