Baccalauréat C septembre 1981 Bordeaux[1]

EXERCICE 1

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2}\right)$. À tout point P de $\mathscr{P}$ on associe son affixe complexe p.
Soit 1, j et j^2 les racines cubiques de l'unité où

$$\text{j} = \cos\frac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{2\pi}{3}.$$

On se propose d'étudier la propriété (E) suivante relative à un triplet (A, B, C) de points de $\mathscr{P}$:
(E) : les affixes a, b et c des points A, B, C satisfont :

$$a + b\jmath + c\jmath^2 = 0.$$

1. Soit $T_{\overrightarrow{v}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ définie dans $\mathscr{P}$.

   Montrer que si le triplet (A, B, C) a la propriété (E), il en est de même de $\left(T_{\overrightarrow{v}}(\text{A}),~T_{\overrightarrow{v}}(\text{B}),~T_{\overrightarrow{v}}(\text{C})\right)$.
2. Soit un triangle équilatéral dont les sommets A, B et C sont disposés de sorte qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AB}},~\overrightarrow{\text{AC}}\right)$ soit $\dfrac{\pi}{3}$.

   Montrer que (A, B, C) a la propriété (E).
3. Caractériser géométriquement la propriété (E).

EXERCICE 2

L'espace affine euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$. On considère l'application affine f qui, à tout point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$, associe le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l}
2x' &=& x + y - z\sqrt{2} + 2\\
2y' &=& x + y + z\sqrt{2} + 2\\
2z' &=& (x - y)\sqrt{2}.
\end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est un vissage.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\overrightarrow{e_1},~\overrightarrow{e_2}\right)$.

Partie A

1. Caen, Clermont-Ferrand, Nantes, Poitiers, Rennes

Soit f la fonction numérique définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = x - 2x\sqrt{2} + 1.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $(f \circ f)(x) = x$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?
3. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2}\right)$. (On prendra pour unité de longueur : 10 cm, et on déterminera les demi-tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses 0 et 1).
4. Calculer l'aire du domaine plan limité par les axes de coordonnées et par la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B

Soit, dans le plan P, les points A_1 de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2} + \lambda\right)$ et B_1 de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2} - \lambda\right)$ où λ est un paramètre réel de l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$.
On note D_λ la droite déterminée par les points A_1 et B_1.

1. Déterminer une équation de D_λ sous la forme

   $$a(\lambda)x + b(\lambda)y + c(\lambda) = 0$$

   où a, b et c sont trois fonctions dérivables de la variable λ que l'on déterminera.
2. Soit D'_λ la droite d'équation

   $$a'(\lambda)x + b'(\lambda)y + c'(\lambda) = 0$$

   où a', b' et c' désignent les fonctions dérivées respectives de a, b et c.
   Vérifier que, pour toute valeur de λ dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ D_λ et D'_λ sont sécantes en un point M_λ. Démontrer que les coordonnées $\left(x_\lambda\,;\,y_\lambda\right)$ de M_λ sont

   $$x_\lambda = \left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 \quad \text{et} \quad y_\lambda = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2.$$

3. Démontrer que, lorsque λ décrit l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ le point M_λ décrit la courbe $(\mathscr{C})$ définie dans la partie A.
4. Démontrer que, pour tout λ appartenant à l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ la droite D_λ est tangente en M_λ à la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie C

À tout point M du plan P, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}y$. On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan P dont l'affixe z satisfait la relation (1)

$$(1) \qquad \left|\frac{z + \mathrm{i}\overline{z}}{2}\right| = \left|z - \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})\right|$$

1. Démontrer que (Γ) admet pour équation dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

2. Démontrer que la courbe $(\mathscr{C})$, définie dans la partie A, est incluse dans la courbe (Γ).

3. Dans cette question le plan P est supposé orienté.
$\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$ est un repère orthonormé direct.
Soit r la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est $\dfrac{\pi}{4}$.
Soit $\overrightarrow{e_1'} = r\left(\overrightarrow{e_1}\right)$, $\overrightarrow{e_2'} = r\left(\overrightarrow{e_2}\right)$.

a. Déterminer une équation de (Γ) dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \overrightarrow{e_1'},\ \overrightarrow{e_2'}\right)$.

b. Quelle est la nature de (Γ) ? Quels sont ses éléments caractéristiques ?

c. Que signifie géométriquement la relation (1) ?