

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Bordeaux¹ septembre 1984 ∞

EXERCICE 1

5 points

1. Déterminer les solutions complexes z_1, z_2 avec $|z_1| < |z_2|$ de l'équation :

$$z^2 - 3(1+i)z + 4i = 0.$$

2. Dans le plan P rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ soient A, B, C les points d'affixes respectives i, z_1, z_2 .

- a. Représenter A, B, C dans P et déterminer l'affixe du barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients $2, -2, 1$.
b. Déterminer l'ensemble des points M de P vérifiant :

$$\overline{MO}^2 - 2\overline{MA}^2 + 2\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = 2.$$

3. Déterminer la similitude directe transformant A en B et B en C . Préciser son centre, son angle, son rapport.

EXERCICE 2

4 points

Le plan orienté \mathcal{P} étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par A, B et C les points de \mathcal{P} de coordonnées respectives $(1; 0)$, $(0; \sqrt{3})$ et $(-1; 0)$ dans ce repère. On appelle r la rotation de centre B , d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, r' la rotation de centre A , d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$, et s la symétrie par rapport à I (I milieu de (A, B)). Soit f l'application $r' \circ s \circ r$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f (on utilisera $f(C)$ et $f(B)$).
2. Déterminer les applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} associées à r, r', s et f et retrouver ainsi les résultats du 1.

PROBLÈME

12 points

Effet d'une transformation sur la représentation graphique d'une fonction

Un plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note $\overline{\mathcal{P}}$ le plan privé de la droite de repère (O, \vec{i}) .

T désigne l'application de $\overline{\mathcal{P}}$ dans $\overline{\mathcal{P}}$ qui, au point $M(x, y)$, associe le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = \frac{1}{y}. \end{cases}$$

1. Bordeaux, Caen, Clermont-Ferrand, Limoges, Nantes, Orléans-Tours, Poitiers, Rennes

Partie A

1. L'objet de cette question est de construire M' à partir de M ; la suite du problème n'en dépend pas.

Soit m la projection orthogonale d'un point M de $\overline{\mathcal{P}}$ sur la droite de repère (O, \vec{i}) .

On désigne par N_1 et par N_2 les points tels que $\overrightarrow{mN_1} - \overrightarrow{mN_2} = \vec{i}$, par M_1 l'orthocentre du triangle MN_1N_2 ?

Calculer les coordonnées de M_1 en fonction des coordonnées de M (on pourra utiliser le produit scalaire : $\overrightarrow{N_2M_1} \cdot \overrightarrow{N_1M}$ et en déduire que M' est le symétrique orthogonal de M_1 par rapport à la droite de repère (O, \vec{j}) .

2. On donne les trois demi-droites D , Δ et L définies respectivement par $y = x + 1$ et $x \geq 1$; par $y = 2x + 1$ et $x \geq 1$; par $y = 1$ et $x \leq -1$.

Donner une équation des courbes D' , Δ' , L' transformées respectives par T de D , Δ , L . On représentera D , Δ , L , D' , Δ' , L' sur un même dessin (unité 2 cm).

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(x) = \frac{(1+x)e^x - 1}{e^x - 1} \end{cases} \text{ pour } x \neq 0.$$

1. Montrer

a. qu'on a, pour $x \neq 0$, $f(x) = 1 + \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)e^x$

b. que f est continue sur \mathbb{R} .

2. Montrer

a. que f est dérivable au point zéro et que $f'(0) = \frac{1}{2}$ (on pourra utiliser le développement limité d'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction qui à x associe e^x).

b. que f est dérivable sur \mathbb{R} et préciser $f'(x)$ pour tout x .

3. a. Soit α la fonction définie sur \mathbb{R} par $\alpha(x) = e^x - x - 1$.

Étudier les signes de $\alpha'(x)$ et de $\alpha(x)$ suivant les valeurs de x .

b. En déduire le tableau de variations de f .

c. Soit \mathcal{C} la courbe représentative de f . Démontrer que D et L sont asymptotes à \mathcal{C} . Préciser la position des branches infinies de \mathcal{C} par rapport à D , Δ et L .

Dessiner \mathcal{C} sur la figure demandée au A 2.

Partie C

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} g(0) = \frac{1}{2} \\ g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + x - 1} \end{cases} \text{ pour } x \neq 0.$$

1. Montrer que $g(x) = \frac{1}{f(-x)}$ pour tout x . En déduire :
- que g est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} ,
 - que g est dérivable sur \mathbb{R} . Exprimer $g'(x)$ à l'aide de $f(-x)$ et de $f'(-x)$. Préciser $g'(0)$.
 - préciser les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Soit Γ la courbe représentative de g . Montrer que Γ est la transformée, par T de \mathcal{C} . En utilisant la position de \mathcal{C} par rapport à D et Δ (cf. B 3. c.), montrer qu'on a :

$$\forall x \in]-\infty; -1], \quad \frac{1}{1-2x} \leq g(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

et préciser la position de Γ par rapport à D' et Δ' . Compléter la figure demandée au A 2. par le tracé de Γ .

3. Soit $\mathcal{A}_1(\lambda)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\lambda \leq x \leq -1$ et $0 \leq y \leq g(x)$ et $\mathcal{A}_2(\mu)$ l'aire de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $1 \leq x \leq \mu$ et $g(x) \leq y \leq 1$.
- On ne cherchera pas à calculer $\mathcal{A}_1(\lambda)$ et $\mathcal{A}_2(\mu)$.
- Prouver que $\mathcal{A}_1(\lambda)$ tend vers $+\infty$ quand λ tend vers $-\infty$.
 - Prouver que l'on a : $1 - g(x) \leq xe^{-x}$ pour $x \geq 1$ et en déduire que $\mathcal{A}_2(\mu)$ admet une limite finie quand μ tend vers $+\infty$.