Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Bordeaux septembre 1969 ∾

EXERCICE 1

Dans le plan xOy on considère l'arc de courbe OA représentant, en repère orthonormé, les variations de la fonction définie par

$$y = \cos^2 x \sin 2x \quad \text{pour} \quad x \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Tracer cet arc de courbe.
2. Déterminer l'aire de la surface limitée par Ox et l'arc OA.

EXERCICE 2

Trouver tous les couples $(x,\ y)$ d'entiers relatifs satisfaisant

$$(1) \qquad 11x - 5y = 14,$$

sachant que le couple $(19,\ 39)$ est une solution de (1).
Montrer qu'il existe un couple et un seul $\left(x_0\,;\ y_0\right)$ solution de (1) avec

$$0 \leqslant x_0 < 5.$$

PROBLÈME

Soit (Π) le plan rapporté à un repère orthonormé, Ox, Oy. Soit T la transformation ponctuelle qui à tout point M d'affixe complexe z associe le point M' d'affixe complexe $\left(\overline{z}\right)^2$ (le nombre complexe $\overline{z}$ étant le complexe conjugué du nombre complexe z).
Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

Partie A

1. Calculer le module et l'argument de $\left(\overline{z}\right)^2$ en fonction du module et de l'argument de z.
2. Quels sont les points doubles de la transformation T ? Montrer que la transformation T n'est pas injective.

Partie B

Soit M le point de (C) tel que $\left(\overrightarrow{\text{O}x},\ \overrightarrow{\text{O}M}\right) \equiv \theta \pmod{2\pi}$, M' son transformé par T. Si M n'est pas un point double pour la transformation T, D_θ est la droite MM'. Si M est un point double, D_θ est la tangente en M au cercle (C).

1. Déterminer θ pour que D_θ soit parallèle à Ox.
2. Déterminer θ pour que D_θ soit parallèle à Oy.

3. Déterminer θ pour que D_θ passe par O.
4. Soit A un point de (C) qui n'est pas un point double, défini par
$\left(\overrightarrow{\mathrm{O}x},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$.
Montrer qu'il existe trois droites D_θ passant par A ; calculer les valeurs correspondantes de θ en fonction de α.
Montrer que deux de ces droites sont perpendiculaires ; soit M_1 et M_2 les intersections, distinctes de A, de ces deux droites avec le cercle (C).
Montrer que la troisième droite est perpendiculaire à la droite M_1M_2.

Partie C

1. Montrer que, si le point M a pour coordonnées x et y, le point M', transformé de M par T, a pour coordonnées $x^2Z - y^2$ et $-2xy$.
2. Quelle est l'image, par la transformation T, de l'ensemble des points des figures suivantes :
droite passant par O distincte des axes ;
cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$?
3. Montrer que, si une figure (F) admet Ox pour axe de symétrie, sa transformée, (F'), par T admet Ox pour axe de symétrie et que, si une figure (F) admet Oy pour axe de symétrie, sa transformée, (F'), par T admet Ox pour axe de symétrie.
Trouver l'image par T du carré de côté 2, de centre O, dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy.